

Tussentoets NS202B: Quantum Mechanics (27 november 2015)

Algemeen:

- de duur van de tussentoets is 60 minuten.
- er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op de achterkant).

Niet vergeten:

- Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel-)vraag nummers!
- Lever alles op 1 vel in!
- Schrijf op dit vel je naam en studentnummer!
- Totaal zijn er 10 punten.

Opgave – Harmonische oscillator

Een eigentoestand ψ_a van de één-dimensionele harmonische oscillator, waarbij de potentiaal wordt gegeven door $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, wordt gegeven door

$$\psi_a(x) = A e^{-x^2/2L^2},$$

waarbij A een constante is.

- Laat zien voor welke waarde van L de toestand $\psi_a(x)$ een oplossing is van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking en bepaal hieruit de energie E_a van de toestand ψ_a . (2 punten)
- Bepaal de normalisatie-constante A . (2 punten)

De golf functie $\psi_b(x)$ wordt gegeven door $\psi_b(x) = L d\psi_a(x)/dx$.

- Laat zien, dat $\psi_b(x)$ ook een oplossing is van de tijdsafhankelijke Schrödinger-vergelijking en bepaal de energie E_b . (2 punten)

Op $t = 0$ wordt de golf functie van het systeem gegeven door een lineaire superpositie van $\psi_a(x)$ en $\psi_b(x)$:

$$\Psi(x, 0) = \alpha \psi_a(x) + \beta \psi_b(x).$$

- Wat is de tijdsafhankelijke golf functie $\Psi(x, t)$? Licht het antwoord toe! *Tip: ook al heb je niet alle antwoorden van de vorige onderdelen, geef dan toch het antwoord door gebruik te maken van de algemene uitdrukking.* (2 punten)
- Is de verwachtingswaarde van x in de toestand tijdsafhankelijk? Zo nee, waarom niet? Zo ja, bereken de frequentie, waarmee de verwachtingswaarde oscilleert. *Tip: wederom, een algemene uitdrukking volstaat, als je niet alle antwoorden hebt van de vorige onderdelen.* (2 punten)

Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\end{aligned}$$

Integraal:

$$\begin{aligned}\int x \sin(ax) dx &= \frac{1}{a^2} \sin(ax) - \frac{x}{a} \cos(ax) \\ \int x \cos(ax) dx &= \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax)\end{aligned}$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x/a} dx = n! a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{n!}{2} a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f \frac{dg}{dx} dx = - \int_a^b \frac{df}{dx} g dx + fg \Big|_a^b$$

Heisenberg onzekerheidsrelatie:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Canonieke commutatie-relatie:

$$[x, p] = i\hbar$$

Ladder operatoren:

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \quad S_{\pm} = S_x \pm iS_y$$