# Tentamen NS202B: Quantum Mechanica 1 (29 Januari 2016)

**Algemeen:**
— de duur van het tentamen is 3 uur.
— er mag geen boek en geen eigen formuleblad worden gebruikt (sommige formules vind je wel op het laatste opgavenblaadje.

**Niet vergeten:**
- *Schrijf leesbaar en identificeer alles wat je opschrijft duidelijk met (deel-)vraag nummers!*
- *Lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in!*
- *Schrijf op ieder vel je naam!*
- *Totaal zijn er 30 punten.*

## Opgave 1 – Harmonische oscillator

De ladder-operatoren worden gegeven door de relaties:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(m\omega\hat{x} \mp i\hat{p}\right).$$

De ladder-operatoren werken op de eigentoestanden $\psi_n$ als $a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$ en $a_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$

a) Laat zien m.b.v. de canonieke commutatie-relatie tussen $\hat{x}$ en $\hat{p}$, dat (*1 punt*)

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1.$$

b) Schrijf de Hamiltoniaan $\mathcal{H}$ van de harmonische oscillator in termen van de ladder-operatoren gegeven de potentiaal $V(x) = {}^1\!/_2 m\omega^2 x^2$. (*1 punt*)

c) Bereken de verwachtingswaarde van $\mathcal{H}$ in toestand $\psi_n$. (*1 punt*)

De grondtoestand voor deze potentiaal wordt gegeven door

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right).$$

d) Bepaal door gebruik te maken van *een* ladder-operator de eerste aangeslagen toestand $\psi_1(x)$. (*2 punten*)

e) Bereken de verwachtswaarde van de $x$, $x^2$, $p$ en $p^2$, als de golffunctie van het deeltje gegeven wordt door $\psi_1(x)$. Voldoet deze toestand aan het Heisenberg onzekerheidsprincipe? *Tip, gebruik voor het berekenen van de verwachtingswaarden de ladder-operatoren $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$ (3 punten)*

De golffunctie op $t = 0$ wordt gegeven door $\Psi(x,0) = \alpha\psi_0(x) + \beta\psi_1(x)$ met $\alpha, \beta$ willekeurige (complexe) constanten, die beide ongelijk aan nul zijn en waarvoor geldt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

f) Bepaal de verwachtingswaarde van $x$ in deze toestand. Laat zien dat $\langle x\rangle$ ongelijk aan nul is. *Tip, gebruik voor het berekenen van de verwachtingswaarde wederom de ladder-operatoren $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$ (1 punt)*

g) Zal de verwachtingswaarde ook ongelijk aan nul zijn, als we in de golffunctie $\Psi(x,0)$ de eerste aangeslagen toestand $\psi_1(x)$ vervangen door de tweede aangeslagen toestand $\psi_2(x)$? Beargumenteer je antwoord. (*1 punt*)

## Opgave 2 – Deeltjes met spin 1/2

Voor een elektron met spin 1/2 zijn de matrix-representaties van $S_x$, $S_y$ en $S_z$ in de basis van $S_z$ gegeven door

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de matrix-representatie van $S^2$. (*2 punten*)

We prepareren een spin in een toestand $\chi$ gegeven door

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

met $a$ en $b$ willekeurige (complexe) constanten, die voldoen aan de normalisatie-conditie $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

b) Bepaal de verwachtingswaarde $\langle S^2 \rangle$ en $\langle S_x \rangle$ in deze toestand. Laat zien, dat de verwachtingswaarde een reële grootheid is. (*2 punten*)

Nu beschouwen we twee deeltjes met spin 1/2, waarbij de spins gegeven wordt door $\vec{S}_1$ en $\vec{S}_2$. De toestanden

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right), \quad |2\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |3\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad \text{en} \quad |4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

zijn eigentoestanden van $S^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2$ en $S_z = S_{1z} + S_{2z}$.

c) Bepaal de mogelijke eigenwaarden voor $S^2$ and $S_z$, gegeven dat $\vec{S}$ de som is van de spin van twee deeltjes met spin 1/2. (*1 punt*)

d) Bereken de eigenwaarden van $S_z$ in de toestanden $|1\rangle$, $|2\rangle$ en $|4\rangle$? (*2 punten*)

e) Bereken de eigenwaarden van $S^2$ in de toestanden $|1\rangle$ en $|2\rangle$ ? (*3 punten*)

## Opgave 3 – Spin-baan wisselwerking

We beschouwen de spin-baan wisselwerking voor waterstof. De storing door de spin-baan wisselwerking is gegeven door

$$\mathcal{H}_{\mathrm{SO}} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\vec{S}\cdot\vec{L}}{m^2c^2r^3}.$$

We willen nu de verschuiving door de spin-baan wisselwerking berekenen in eerste-orde, niet-ontaarde storingsrekening.

a) Geef het matrix-element, dat in eerste-orde storingsrekening geëvalueerd moet worden om de verschuiving van de toestanden te bepalen. (*1 punt*)

b) Laat zien dat $\vec{L}$ niet commuteert met de storingsterm $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$ door de commutator uit te rekenen van bijvoorbeeld $L_x$ met $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$. (*2 punten*)

c) Laat zien dat $\vec{S}$ niet commuteert met de storingsterm $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$ door de commutator uit te rekenen van bijvoorbeeld $S_x$ met $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$. (*1 punt*)

d) Laat zien dat $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ wel commuteert met de storingterm $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$ door de commutator uit te rekenen van bijvoorbeeld $J_x$ met $\mathcal{H}_{\mathrm{SO}}$. (*1 punt*)

e) Geef aan, waarom uit de commutatie-relaties van b)-d) volgt, dat de basis $|nJLSM_J\rangle$ wel een goede basis is om spin-baan wisselwerking te beschrijven, en $|nLSM_LM_S\rangle$ niet. (*1 punt*)

f) Geef aan, waarom we voor het matrix-element onder a) afzonderlijk de verwachtingswaarde van $\vec{S}\cdot\vec{L}$ en $1/r^3$ mogen bepalen. (*1 punt*)

g) Bepaal de verwachtingswaarde van $\vec{S}\cdot\vec{L}$ in de basis $|nJLSM_j\rangle$. (*2 punten*)

De verwachtingswaarde van $1/r^3$ is gegeven door

$$\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle = \frac{1}{L(L+{}^1\!/\!_2)(L+1)n^3{a_0}^3}.$$

h) Geef aan, waarom de toestanden met $J = L \pm S$ verschillend verschuiven door de spin-baan wisselwerking. (*1 punt*)

## Formuleblad

Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is niet *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!

Goniometrie:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Integraal:

$$\int x \sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$$
$$\int x \cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\sin(ax)$$

Wet van de cosinus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Exponentiële integraal:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x/a}\mathrm{d}x = n!\, a^{n+1}$$

Gaussische integraal:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2/a^2}\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2}$$

Partiële integratie:

$$\int_a^b f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g\,\mathrm{d}x + fg\Big|_a^b$$

Heisenberg onzekerheidsrelatie:

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Canonieke commutatie-relatie:

$$[x, p] = i\hbar$$

Ladder operatoren:

$$L_\pm = L_x \pm iL_y \qquad S_\pm = S_x \pm iS_y$$