

Kwantummechanica 2017/2018 Deeltoets D

Bij deze toets mag een enkel, handgeschreven vel met notities worden gebruikt. Een grafische calculator is toegestaan, tenzij deze signalen kan verzenden of ontvangen. De reguliere tijd voor de toets is 45 minuten. Antwoorden op het verstrekte antwoordblad, dit a.u.b. niet vouwen, kreuken of scheuren. Vermeld steeds uw NAAM en STUDENTNUMMER. Onduidelijke of onleesbare antwoorden worden fout gerekend. Studenten die recht hebben op extra tijd (15 minuten): Dit graag kenbaar maken aan de assistenten, en plaatsnemen op de aangegeven plaatsen. Deze toets heeft 7 vragen, voor een totaal van 100 punten.

1 Impulsmoment

Een starre rotor is een model voor de rotatiebeweging van sommige moleculen zoals H_2 en O_2 . We beschouwen een starre rotor (rigid rotor) die bestaat uit twee massas m op een vaste een afstand $r = a$. De klassieke Hamiltoniaan is $H = \frac{\vec{L}^2}{ma^2} + \alpha L_z$. Hier is \vec{L} het impulsmoment en α is een parameter (met toepasselijke fysische eenheden). Het wordt een kwantummechanisch probleem als we \vec{L} als een operator (\hat{L}) beschouwen, die op een golf functie $\Psi(\theta, \phi)$ werkt.

1. (20 points) Wat zijn de eigentoestanden en eigenfuncties van dit probleem?
2. (10 points) Wat is de ontarding van de eigenwaarden als $\alpha = 0$ en als $\alpha \neq 0$?

2 Spin in een magneetveld

We beschouwen een spin $S = 1/2$ in een magneetveld. De Hamiltoniaan is $\hat{H} = 2\mu B \hat{S}_x$.

3. (20 points) Wat zijn de eigentoestanden en eigenfuncties van dit probleem?

Ook als het niet gelukt is de eigentoestanden en eigenwaarden te vinden kunt u verder. Noem de grootste eigenwaarde E_+ met de bijbehorende genormaliseerde eigentoestand $|+\rangle$ en de kleinste eigenwaarde E_- met de genormaliseerde eigentoestand $|-\rangle$.

Op tijdstip $t = 0$ is het systeem in een superpositietoestand $|\psi(t=0)\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$.

4. (10 points) Vind de toestand $\psi(t)$ voor $t > 0$.

3 Scheiding van variabelen

De Hamiltoniaan van de tweedimensionale harmonische oscillator is

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad (1)$$

De bijbehorende tijdonafhankelijke Schrödingervergelijking is

$$\hat{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (2)$$

5. (20 points) Laat zien dat door scheiding van variabelen (separation of variables) $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ de Schrödingervergelijking gesplitst kan worden als:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}_x^2}{2m}X(x) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2X(x) &= E_xX(x) \\ \frac{\hat{p}_y^2}{2m}Y(y) + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2Y(y) &= E_yY(y) \end{aligned} \quad (3)$$

met $E_x + E_y = E$.

6. (10 points) Wat zijn de energie eigenwaarden?
7. (10 points) Wat is de ontarding van de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand?