Deeltoets C: Formalisme en bolsymmetrie

Bij deze toets mag een enkel, handgeschreven vel met notities worden gebruikt. Een grafische calculator is toegestaan, tenzij deze signalen kan verzenden of ontvangen. De reguliere tijd voor de toets is 45 minuten. Antwoorden op het verstrekte antwoordblad, dit a.u.b. niet vouwen, kreuken of scheuren. Vermeld steeds uw NAAM en STUDENTNUMMER. Onduidelijke of onleesbare antwoorden worden fout gerekend. Studenten die recht hebben op extra tijd (15 minuten): Dit graag kenbaar maken aan de assistenten, en plaatsnemen op de aangegeven plaatsen. Deze toets heeft 6 vragen, voor een totaal van 100 punten.

Foucault en Dirac

De 1-dimensionale harmonische oscillator is een kwantummechanisch model voor een slinger. We beschouwen dit systeem in de Dirac notatie. We beschouwen een 1-dimensionale harmonische oscillator met energie-eigentoestanden $|j\rangle$, en hoekfrequentie ω.

1. (20 points) Schrijf de Hamiltonoperator als een som over alle eigentoestanden.
2. (20 points) Schrijf de ladderoperatoren $\hat{a}$ en $\hat{a}^+$ als sommaties over de energie-eigentoestanden in de Dirac notatie.

Ladders en bolsymmetrie

Ladderoperatoren zijn zeer nuttig bij het beschouwen van toestanden met impulsmoment in potentialen met sferische symmetrie. We beschouwen toestanden $|l, m\rangle$ met impulsmoment l en magnetisch kwantumgetal (projectie van het impulsmoment) m.

3. (15 points) Laat zien, op basis van de commutatieregels van $\hat{\mathbf{L}}$ en $\mathbf{L}^2$, dat $\hat{L}_+$ met $\mathbf{L}^2$ commuteert.
4. (10 points) Gegeven is dat $\hat{L}_+|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l, m+1\rangle$. Schrijf de operator $\hat{L}_+$ in Dirac notatie.
5. (10 points) Bereken $(\hat{L}_+)^\dagger$.

Impulsmoment en matrices

Beschouw de volgende vorm van de impulsmoment-operator voor een systeem met $l = 1$.

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle m \langle m|. \tag{1}$$

6. (25 points) Voor een zeker systeem is de Hamiltonoperator $\hat{H} = \beta \hat{L}_z$, met β een reële constante. De toestand van het systeem op $t = 0$ is $|\Psi(0)\rangle$. Laat zien dat

   $$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle,$$

   met

   $$\hat{U}(t) = \sum_{m=-1,0,1} |m\rangle e^{-i\beta m t}\langle m|,$$

   aan de tijdafhankelijke Schrödingervergelijking voldoet.