Tentamen QM1b (Dinsdag 31–1–2006) Uitwerking

Opgave 1

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a. Hoe luidt het (algemeen) "onzekerheidsprincipe" voor een paar fysische grootheden, uitgedrukt in termen van de bijbehorende operatoren?

Antwoord: Als twee operatoren $\hat{A}$ en $\hat{B}$ niet commuteren geldt het (algemeen) onzekerheidsprincipe $\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right)^2$.

Commentaar: Als duidelijk is gemaakt dat $\sigma_A \sigma_B$ evenredig met $|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$ is wordt het punt al toegekend.

b. Zoals bekend luidt het zogenaamde "energie–tijd onzekerheidsprincipe" $\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$. Wat is (precies!) de betekenis van Δt?

Antwoord: Voor een fysische grootheid $\hat{Q}$ die niet expliciet van de tijd afhangt (dus $\partial\hat{Q}/\partial t = 0$) en die niet commuteert met de Hamiltoniaan (dus $[\hat{H},\hat{Q}] \neq 0$) is de tijd Δt nodig om de verwachtingswaarde van $\hat{Q}$ met één standaarddeviatie σ_Q te veranderen gerelateerd aan de onzekerheid in de verwachting van de Hamiltoniaan ($\sigma_H = \Delta E$) via $\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

c. Wat is de afmeting van de "Bohr straal" (ongeveer)?

Antwoord: $a = 5.29177 \times 10^{-11}$m, dat is ongeveer 0.5Å.

Commentaar: Alles in het interval (10^{-11}–10^{-10}) wordt goed gerekend. Voor wie één van de uitdrukkingen

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{\alpha m_e c}$$

kent en die goed invult met de gegevens uit de tabel wordt het ook goed gerekend.

d. Geef de kanonieke commutatierelaties voor de componenten van het impulsmoment.

Antwoord: $[\hat{L_x},\hat{L_y}] = \mathrm{i}\hbar\hat{L_z}$ en cyclische (in $\{x,y,z\}$) verwisselingen.

e. Wat zijn de toestanden van de twee spin $\frac{1}{2}$ deeltjes in een samengestelde $s = 1$, $m = 0$ (triplet) toestand?

Antwoord: De deeltjes zijn in een "verstrengelde toestand" en men kan aan de afzonderlijke deeltjes geen toestand toekennen. Wat we wèl weten is dat de spins tegengesteld zijn.

Commentaar (*niet nodig voor een goed antwoord*): De toestand is $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$.

f. Waarom beschrijft $|\uparrow\downarrow\rangle$ geen stationaire toestand van een systeem van twee spin $\frac{1}{2}$ deeltjes met $s = 0$?

Antwoord: In een $s = 0$ toestand moet $m = 0$, dus moet $\hat{S}_z|\uparrow\downarrow\rangle = 0$. Maar we hebben

$$\hat{S}_z|\uparrow\downarrow\rangle = \left(\hat{S_z^{(1)}}|\uparrow\rangle\right)\left(\hat{S_z^{(2)}}|\downarrow\rangle\right) = -\frac{\hbar^2}{2}|\uparrow\downarrow\rangle,$$

dat klopt dus niet, $|\uparrow\downarrow\rangle$ is geen simultane eigentoestand van $\hat{S}^2$ en $\hat{S}_z$.

Commentaar (*niet nodig voor een goed antwoord*): Hetzelfde geldt voor $|\downarrow\uparrow\rangle$, n.l., $\hat{S}_z|\downarrow\uparrow\rangle = -\frac{\hbar^2}{2}|\downarrow\uparrow\rangle$, zodat $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle)$ wèl de gewenste eigenschappen heeft (dat is de "singlettoestand"). De toestand $|\uparrow\downarrow\rangle$ is een lineaire combinatie van de singlet toestand $s = 0$, $m = 0$ en de triplet toestand $s = 1$, $m = 0$, dat is $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$.

g. Waarom zijn de "bolfuncties" ($Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$) niet van nut bij het beschrijven van de golffunctie voor de spin–toestand van deeltjes?

Antwoord: De bolfuncties zijn van nut bij het beschrijven van baanimpulsmoment en zijn invariant voor rotaties over 2π om de Z–as. Dat heeft alleen zin als het quantumgetal l geheel is. In het geval van "spin" is het quantumgetal s (zelfde als l) *halftallig* en verandert de golffunctie van teken bij draaiing 2π om de Z–as.

h. Welke "kracht" is in het geding als men over "*exchange forces*" spreekt?

Antwoord: Het gaat hier in het geheel niet over "krachten", maar over het feit dat twee identieke deeltjes in een samengestelde toestand die symmetrisch is dichter bij elkaar zitten (Δx — in één dimensie — is minder b.v.) dan in de overeenkomstige antisymmetrische toestand. Het is dus een (kwantummechanisch) *kinematisch effekt.*

i. Hoe luidt het "Pauli uitsluitingsprincipe"?

Antwoord: Het "Pauli uitsluitingsprincipe" zegt dat identieke fermionen niet in dezelfde (één–deeltjes) toestand kunnen verkeren.

j. Waarom is de Slater–determinant ($\det|\psi_i(\boldsymbol{r_j})|$) zo handig bij het beschrijven van de toestand van identieke fermionen?

Antwoord: De Slater–determinant levert een antisymmetrische lineaire combinatie van méér–deeltjes golffuncties en beschrijft dus specifiek méér-fermionen toestanden.

Opgave 2

Beschouw een deeltje met spin $\frac{1}{2}$.

a. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ en $\hat{S}_z$?

Oplossing: In de $\hat{S}^2$, $\hat{S}_z$ representatie hebben we (gebruik makend van het feit dat de Pauli matrices $\sigma_{x,y,z}$ gegeven zijn in tabel #10):

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De eigenvectoren van $\hat{S}_z$ zijn $|+\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle = \{1,0\}$ bij eigenwaarde $+\hbar/2$ en $|-\frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\rangle = \{0,1\}$ bij eigenwaarde $-\hbar/2$. De eigenwaarden van $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$ zijn natuurlijk ook $\pm\hbar/2$, we behoeven er alleen de eigenvectoren bij te zoeken. De eigenvector van $\hat{S}_x$ bij eigenwaarde $+\hbar/2$ is (zeg) $a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \{a,b\}$, waarbij we de coefficienten a, b nog moeten bepalen uit de vergelijking

$$\hat{S}_x(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle) = +\frac{\hbar}{2}(a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle),$$

ofwel

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

met als oplossing $b = a$. Normalizeren levert $a = b = 1/\sqrt{2}$ dus de gezochte eigenvector is

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De andere eigenvector volgt direct uit de orthonormaliteitscondities (of op dezelfde manier als boven) en is

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Voor de operator $\hat{S}_y$ gaat het op dezelfde manier, we vinden de eigenvector $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{i}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ bij eigenwaarde $+\hbar/2$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + \mathrm{i}|\downarrow\rangle)$ bij eigenwaarde $-\hbar/2$.

b. Beschouw het deeltje in een eigentoestand van $\hat{S}_x$. Wat zijn de mogelijke meetresultaten (met bijbehorende waarschijnlijkheden) voor de z–component van de spin?

Oplossing: De eigenvectoren van $\hat{S}_x$ zijn

$$\mu_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} +1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

de eigenvectoren van $\hat{S}_z$ zijn

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{en } \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dus wat de $\hat{S}_x$ toestand ook is, de projecties op de eigenvectoren van $\hat{S}_z$ zijn $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ en er is altijd 50% kans $\pm\hbar/2$ te meten.

c. Op tijd $t = 0$ is het deeltje in de eigentoestand van $\hat{S}_x$ bij eigenwaarde $+\hbar/2$. We schakelen een magnetisch veld langs de Z–richting aan zodat de Hamiltoniaan gegeven wordt door

$$\hat{H} = -\gamma B\, \hat{S}_z,$$

(B het magnetisch veld, γ de gyromagnetische verhouding). Laat zien dat de toestand op tijd $t > 0$ door

$$|\psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{+\frac{\mathrm{i}\gamma B}{2}t}|\uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\gamma B}{2}t}|\downarrow\rangle\right),$$

gegeven wordt.

Oplossing: Op $t = 0$ is de toestand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om de tijdsevolutie te vinden gebruiken we tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi.$$

De Hamiltoniaan hangt niet van de tijd af, dus we kunnen separeren: $\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t) = \phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})\psi(t)$. We mogen meteen $\psi(t) = \exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$ onderstellen voor zekere constante E en krijgen dan $H\phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = E\phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$. Dus $\phi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ moet een eigentoestand van de Hamiltoniaan zijn bij energie (eigenwaarde) E. De Hamiltoniaan is

$$H = -\gamma B\, \hat{S}_z,$$

dus evenredig met $\hat{S}_z$, d.w.z., de eigenvectoren van $\hat{S}_z$ zijn ook eigentoestanden van de Hamiltoniaan, we hoeven alleen de eigenwaarden met $-\gamma B$ te vermenigvuldigen. Dus krijgen we

$$E_\pm = \mp\gamma B\frac{\hbar}{2}.$$

De stationaire toestanden zijn

$$|\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)\rangle = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t}|\uparrow\rangle,$$

en

$$|\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t}|\downarrow\rangle.$$

Een willekeurige toestand is een lineaire combinatie van deze stationaire toestanden. We kiezen er één die op $t = 0$ met de begintoestand overeenstemt, dus

$$|\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t}|\uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t}|\downarrow\rangle\right).$$

d. Wat zijn de mogelijke waarden bij meting van $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_z$ op tijd $t > 0$ en met welke waarschijnlijkheden? Verklaar eventuele verschillen.

Oplossing: De waarschijnlijkheid om $S_x = +\hbar/2$ te meten ten tijde $t > 0$ is

$$\begin{aligned} P(S_x = +\frac{\hbar}{2}) &= |\langle \mu_+ | \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} \right) \right|^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{\gamma B}{2} t\right), \end{aligned}$$

en de kans $S_x = -\hbar/2$ te meten is

$$\begin{aligned} P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) &= |\langle \mu_- | \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} \right) \right|^2 \\ &= \sin^2\left(\frac{\gamma B}{2} t\right), \end{aligned}$$

De waarschijnlijkheid om $S_z = +\hbar/2$ te meten ten tijde $t > 0$ is

$$P(S_z = +\frac{\hbar}{2}) = |\langle \chi_+ | \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} \right|^2 = \frac{1}{2},$$

en de kans $S_z = -\hbar/2$ te meten is

$$P(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = |\langle \chi_- | \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Het deeltje voert een Larmorprecessie om de Z-as uit, dus de waarde van S_x varieert periodiek terwijl de component S_z niet verandert.

e. Wat zijn de verwachte waarden bij meting van $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_z$ op tijd $t > 0$?

Oplossing: Het eenvoudigst is het geval $\hat{S}_z$: Omdat we met kans 50% $\pm\hbar/2$ meten is de verwachting natuurlijk 0, dus constant in de tijd. Dat klopt ook met het feit dat $[\hat{H}, \hat{S}_z] = 0$: S_z is een behouden grootheid.

Voor het geval S_x kunnen we het eenvoudigst gebruik maken van de al in **d** berekende kansen. (Directe berekening werkt ook mocht je **d** niet gemaakt hebben.) We hebben kans $P(S_x = +\frac{\hbar}{2}) = \cos^2\left(\frac{\gamma B}{2}t\right)$ om $+\hbar/2$ te meten en kans $P(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = \sin^2\left(\frac{\gamma B}{2}t\right)$ om $-\hbar/2$ te meten, dus de verwachte waarde is

$$\begin{aligned} P(S_x = +\frac{\hbar}{2})\,(+\frac{\hbar}{2}) + P(S_x = -\frac{\hbar}{2})\,(-\frac{\hbar}{2}) &= \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\gamma B}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma B}{2}t\right)\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\cos(\gamma B t)\,. \end{aligned}$$

De verwachting fluctueert dus periodiek in de tijd met hoekfrequentie $\omega = \gamma B$ (de Larmorfrequentie).

Klassiek is e.e.a. ook evident: Het deeltje voert een Larmorprecessie om de Z–as uit, dus S_z is constant en S_x varieert periodiek.

Alternatieve berekening: Bereken $\langle \Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)|\hat{S}_x|\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)\rangle$ en $\langle \Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)|\hat{S}_z|\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)\rangle$.

We hebben

$$\langle \Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)|\hat{S}_x|\Psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, t)\rangle \quad =$$

$$\begin{aligned}
&\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) |\hat{S}_x| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) \rangle = \\
&\frac{1}{2} \langle \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) | \frac{\hbar}{2} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) \rangle = \\
&\frac{\hbar}{4} \langle \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) | \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \uparrow\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\gamma B}{2}t} | \downarrow\rangle \right) \rangle = \\
&\frac{\hbar}{4} \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\gamma B t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma B t} \right) = \\
&\frac{\hbar}{2} \cos(\gamma B t),
\end{aligned}$$

(gebruikmakend van $\langle \uparrow | \downarrow \rangle = 0$ en $\langle \uparrow | \uparrow \rangle = 1$, *etc.*) met (natuurlijk) hetzelfde resultaat, alleen wat omslachtiger. De berekening voor $\hat{S}_z$ gaat op dezelfde manier.

Opgave 3

Een porphyrinering is een molecuul dat deel uitmaakt van o.a. chlorofyll en haemoglobine. Een aantal fysische eigenschappen worden beschreven door het eenvoudige model van een cirkelvormig pad met straal $r = 4\text{Å}$ waarover 18 electronen bewegen. We verwaarlozen interacties tussen de electronen onderling en ook het hoekmoment, d.w.z., één electron beschouwen we als een "vrij deeltje in één dimensie" met periodieke randvoorwaarde van periode $2\pi r$.

a. Laat zien dat de energieniveaus van een enkel electron gegeven worden door

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2mr^2} k^2 \text{ met } k = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots,$$

waarbij m de massa van het electron voorstelt. Wat zijn de bijbehorende golffuncties? (Geef de positie van een electron aan via de hoekparameter ϑ.)

Oplossing:

De Schrödingervergelijking voor één electron op de ring is

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \psi(\vartheta) = E\psi(\vartheta),$$

met oplossing

$$\psi(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta}.$$

De randvoorwaarde (we moeten enkelwaardigheid van de golffunctie eisen) is

$$\psi(\vartheta) = \psi(\vartheta + 2\pi),$$

zodat $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ terwijl de energieniveaus gegeven worden door

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mr^2} n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Merk op dat de toestanden $n \neq 0$ tweevoudig ontaard zijn (logisch, want het electron kan linksom of rechtsom lopen), terwijl het grondniveau niet ontaard is (ook logisch omdat het electron dan stil staat).

b. Beschouw de grondtoestand van het systeem. Hoe zijn de 18 electronen over de energieniveaus uit **a** verdeeld? Wat is de waarde van de energie van de grondtoestand?

Oplossing: We maken gebruik van het Pauli uitsluitingsprincipe. Ieder (niet ontaard) niveau kan door twee electronen (met tegengestelde spin) bezet worden. Dus de configuratie voor 18 electronen op de ring met laagste energie is

$$0^2 1^4 2^4 3^4 4^4.$$

c. Wat is de laagste electronisch geëxciteerde toestand van het molecuul?

Oplossing: De eerste aangeslagen toestand is

$$0^2 1^4 2^4 3^4 4^3 5^1.$$

d. Wat is de golflengte van de electromagnetische straling waarmee het molecuul door absorptie van de grondtoestand naar de eerste aangeslagen toestand kan overgaan?

Oplossing:

Het energieverschil tussen het vierde en het vijfde niveau is

$$\Delta E = E - 5 - E - 4 = \frac{\hbar^2}{2mr^2}(5^2 - 4^2) = \frac{9\hbar^2}{2mr^2}.$$

De bijbehorende absorptiegolflengte is

$$\lambda = \frac{ch}{\Delta E} = \frac{8\pi^2}{9}\left(\frac{mc}{h}\right) r^2 = \frac{8\pi^2}{9} \times \frac{4^2}{0.0242} = 5800\text{Å},$$

waarbij $h/mc = 0.0242$Å (gegeven in de tabel #9) de Comptongolflengte van het electron is.

Ter herinnering:

(Aanwijzing: Onderstaande relaties en definities kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

Formele relaties:

$$\int z^n \sin z \,\mathrm{d}z = -z^n \cos z + n \int z^{n-1} \cos z \,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\int z^n \cos z \,\mathrm{d}z = z^n \sin z - n \int z^{n-1} \sin z \,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

$$\ln \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n-1}\,(2^{2^n}-1)B_{2n}}{n(2n)!}\, z^{2n}, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-m}, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x/a}\,\mathrm{d}x = n!a^{n+1}, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \mathrm{e}^{-x^2/a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2}a^{2n+2}. \tag{7}$$

Natuurkundige definities:

$$J(x,t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right). \tag{8}$$

$$\text{Comptongolflengte van het electron } \frac{h}{mc} = 0.0242\text{Å} \tag{9}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34}\text{Js}, \tag{11}$$

$$c = 2.99792 \times 10^{8}\text{m/s}, \tag{12}$$

$$m_e = 9.10938 \times 10^{-31}\text{kg}, \tag{13}$$

$$e = 1.60218 \times 10^{-19}\text{C}, \tag{14}$$

$$\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Jm}, \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 1/137.036, \tag{16}$$

$$-E_1 = \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} = 13.6057\text{eV}. \tag{17}$$