Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-202b werd in 2006-2007 gegeven door T. Peitzmann.

Quantummechanica 1 (NS-202b)
9 november 2006

Opgave 1

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Waardoor wordt in de quantummechanica een toestand van een systeem beschreven?

b) Welke eisen moeten aan de golffunctie gesteld worden?

c) Hoe kan je de golffunctie fysisch interpreteren?

d) Wanneer heeft de golffunctie een oscillerend en wanneer een monotoon (dus alleen steigend of dalend) karakter)?

e) Wat is de Hamiltoniaan in de quantummechanica?

f) Wat betekent de onzekerheidsrelatie van Heisenberg?

g) Wat wordt bedoeld met "tunneling"? Is er een klassiek analogon?

h) Wat zijn de eigenschappen van een stationaire toestand?

i) Wat gebeurt er met een toestand ψ_n van de harmonische oscillator als je de ladderoperatoren a_+ of a_- daarop toepast?

j) Waarom stelt het vrij deeltje in de quantummechanica een groter probleem voor dan verwacht?

Opgave 2

Beschouw het systeem van de oneindige put, d.w.z., een deeltje met massa m in de potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad -L/2 < x < L/2 \\ \infty & : \quad \text{anders} \end{cases}$$

a) Toon dat

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \text{ met } n = 1, 3, 5, \cdots$$

en

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \text{ met } n = 2, 4, 6, \cdots$$

stationaire toestanden zijn van dit systeem en dat de energieën gegeven zijn als:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

b) Bereken de onzekerheid in de plaats $\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$ en in de impuls $\Delta p = \sqrt{< p^2 > - < p >^2}$ voor de toestand ψ_n met een willekeurige n. Is dat in overeenstemming met de onzekerheidsrelatie van Heisenberg? Voor welke n vind je de kleinste waarde van $\Delta x \Delta p$ en hoe groot is die ongeveer?

c) Hoe ziet de tijdsafhankelijke golffunctie van een stationaire toestand van de oneindige put eruit? Hoe schrijf je een golffunctie $\Psi(x,t)$ met willekeurige beginvoorwaarden $\Psi(x,0)$ in termen van de stationaire oplossingen? Welke stationaire oplossingen zijn belangrijk als je naar een beschrijving van

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} B(x+L/2) & : \quad -L/2 < x < -L/4 \\ -Bx & : \quad -L/4 < x < L/4 \\ B(x-L/2) & : \quad L/4 < x < L/2 \end{cases}$$

zoekt (Hint: maak een tekening van deze golffunctie).

d) Beschouw nu de golffunctie met de beginvoorwaarden:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_j(x) + \psi_l(x)]$$

met $l > j$. Normeer de functie. Bereken de waarschijnlijkheidsdichtheid en de verwachtingswaarde van de plaats als functie van de tijd. (Toevoeging: integralen die van de tijd afhangen kan je laten staan - je hoeft deze nu niet expliciet te berekenen!) Toon dat je bij benadering voor $l = j+1$ en $j \gg 1$ het gedrag kan beschrijven als een oscillatie met de hoekfrequentie

$$\omega = \frac{\pi^2 \hbar j}{mL^2}$$

e) Toon aan dat de "herhalings-periode" van een willekeurige toestand $\Psi(x,t)$ in de oneindige put gegeven is door

$$T = \frac{4mL^2}{\pi\hbar}$$

dus na deze tijd keert iedere golffunctie terug naar de begintoestand. (Hint: Vergelijk $\Psi(x,T)$ met $\Psi(x,0)$.)

Opgave 3

Beschouw de potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -L & (I) \\ +V_0 & : \quad -L < x < L & (II) \\ 0 & : \quad x > L & (III) \end{cases} \tag{1}$$

voor een deeltje dat van links ($-\infty$) komt en energie E met $0 < E < V_0$ heeft.

a) Geef de oplossingen van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor de drie gebieden aan.

b) Stel de randvoorwaarden in $x = \pm L$ op. Gebruik de vergelijkingen om een samenhang tussen amplitude A van de van links inlopende golf en de amplitude F van de naar rechts uitlopende golf te vinden en toon dat de transmissiecoëfficiënt gegeven is door:

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{2L}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\right) \tag{2}$$

c) Kan je alle parameters van de golffunctie uit de randvoorwaarden bepalen? Is de golffunctie normeerbaar? Hoe zal je dit probleem realistisch kunnen aangaan? Kunnen we met een zekere waarde van de energie rekenen? Wat betekent dat voor het berekenen van transmissie en reflectie?

d) In het boek wordt de transmissiecoëfficiënt voor een potentiaal:

$$V'(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -L & (I) \\ -V_0 & : \quad -L < x < L & (II) \\ 0 & : \quad x > L & (III) \end{cases}$$

en energie $E > 0$ berekent als:

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 + E)} \sin^2\left(\frac{2L}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 + E)}\right) \tag{3}$$

Gebruik deze vergelijking om de transmissie (2) voor de potentiaal $V(x)$ in deze opgave te bepalen.

e) Discusseer het gedrag van T uit deel b. als functie van de energie. Toon dat je bij benadering kan schrijven:

- voor $E \ll V_0$:

$$T = \frac{4E}{V_0 \sinh^2(2L\sqrt{2m(V_0)}/\hbar)}$$

- voor $E \approx V_0$:

$$T^{-1} = 1 + \frac{2mV_0^2}{E}\frac{L^2}{\hbar^2}$$

Ter herinnering:

(Onderstaande relaties kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$