Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-202b werd in 2004/2005 gegeven door Dr. J. Koenderink.

Quantummechanica 1 (NS-202b)
21 april 2005

Opgave 1

a) Wat is de dimentie (i.e. eenheid) van de golffuctie?

b) Wanneer krijgen we met het "instorten van de golffunctie" te maken?

c) We meten de impuls voor een vrij deeltje. Wat kunnen we nu over de verwachte positie zeggen?

d) Een deeltje in een potentiaalput bevindt zich in de grondtoestand $\psi(x)$. Wat is de betekenis van een golffunctie $\theta(X) = -i\psi(x)$?

e) Waarom is het begrip "simultane meting van plaats en impuls" in de quantummechanica niet bruikbaar?

f) Waarom is het nu juist de *groepsnelheid* en niet de fasesnelheid die met de klassieke "snelheid" van een vrij deeltje overeenkomt?

g) Waarom is met het vinden van de stationaire oplossingen van de Schrödingervergelijking ook het algemene probleem van de tijdsevolutie van de golffunctie opgelost?

h) Hoe groot is $\hbar$ ongeveer (orde van grootte is genog, denk aan de dimentie!)?

i) Wat is de commutator $[x, p]$ van plaats en impuls?

j) Wat wordt bedoeld met "tunneling"? Waarom is dit een "typisch quantummechanisch" effect?

Opgave 2

Beschouw het ééndimentionale systeem van een vrij deeltje (potentiële energie $V(x) = 0$) met periodieke randvoorwaarden, d.w.z. $\psi(x + L) = \psi(x)$ voor zekere (positiev)e afstand L. Dit komt neer op de bewging van een "deeltje op een cirkel".

a) Vind de stationaire toestanden (vergeet niet te normeren). Stel het energieschema op. Welke energieniveaus zijn gedegenereerd?

b) We kunnen de stationaire toestanden ook weergeven als even ($f(x) = f(-x)$) en oneven ($f(x) = -f(-x)$) functies op het interval $(-L/2, +L/2)$. Hoe hangen deze functies samen met de stationaire oplossingen uit onderdeel (a.)?

c) Nu zet men een ondoordringbare muur in $x = -L/2$ (vanwege de periodieke randvoorwaarden wordt deze automatisch herhaalt in $x = +L/2$ (!)). Bereken weer de stationaire toestanden.

d) Stel het energieschema op voor het geval (c.) en vergelijk met het energieschema van het geval (a.). Bespreek de verschillen (let ook op de eventuele degeneratie).

e) We halen nu de muren (van geval c.) weer weg, maar zetten een verstoring van de potentiaal $\alpha\delta(x)$ in de oorsprong. Welke respresentatie (zie a. en b.) is nu het handigst om deze configuratie te beschrijven en waarom? Wat gebeurt er met de ontaarding? (N.B.: Er wordt geen *berekening* gevraagd!)

Opgave 3

We beschouwen de gebonden toestanden van een deeltje met massa m in een ééndimensionale potentiaal

$V = \infty, x < 0,$
$V = 0, 0 \leq x \leq a,$
$V = V_0, x > a$
waarbij $a > 0$ een afstand voorstelt en $V_0 > 0$ te nemen is. Noem de energie van het deeltje E.

a) Teken de potentiaal. Vind de relevante oplossingen van de Schrödingervergelijking in de gebieden $x < 0, 0 \leq x \leq a$ en $x > a$.

b) Stel de randvoorwaqarden voor dit probleem op.

c) Laat zien dat de gebonden toestanden gegeven worden door de vergelijking

$$tan \frac{\sqrt{2mEa}}{\hbar} = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

d) Onderzoek de bovenstaande vergelijking door de volgende vragen in aanmerking te nemen:

- Is er tenminste één gebonden toestand?
- Kunnen er méér dan één bestaan?
- Kunnen er oneindig veel bebonden toestanden bestaan?

(NB: Je wordt niet verwacht deze transcedente vergelijking op te lossen! Gebruik een schetsje en beredeneer.)

e) Schets de golffunktie van een eventuele grondtoestand zonder bovenstaande vergelijking op te lossen.