Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-202b werd in 2004/2005 gegeven door prof. dr. J.J. Koenderink.

Quantummechanica (NS-202b)
7 juli 2005

Neem goede notie van deze opmerkingen:

- de duur van het tentamen is 3 uur
- alle opgaven tellen even zwaar.
- alle onderdelen van een opgave tellen even zwaar
- beantwoord vragen kort maar terzake. "Ja" of "nee" zijn natuurlijk geen voldoende antwoorden, maar een bladzijde tekst ook niet als één zin zou volstaan.
- Licht alle niet-triviale manipulaties met een kort zinnetje toe. Formules (of flarden van formules) zonder enige tekst leveren u zeker geen punten op.
- Vereenvoudig al uw uitkomsten zoveel mogelijk (bijv. schrijf bij voorkeur "1" i.p.v. $\frac{17}{221}\sqrt{169\left(\frac{1-\frac{1}{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}+1}\right)^5}$, want hoewel deze uitdrukkingen inderdaad aan elkaar gelijk zijn zal de laatste toch fout gerekend worden).
- overbodige commentaren of berekeningen leveren u natuurlijk geen punten op.
- *schrijf leesbaar en identificeer alles wat u opschrijft duidelijk met (deel-)vraagnummers.*
- *lever iedere opgave op een afzonderlijk vel in! Vermeld bij alle opgaven welk tentamen je doet! Schrijf op ieder vel je naam!*

Opgave 1

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Waarom worden fysische grootheden voorgesteld door hermitische operatoren?

b) Waarom is de tijdsevolutieoperator unitair?

c) Geef fysische interpretaties van een bracket als $\langle\alpha|\beta\rangle$.

d) Waarom noemt men een bracket als $\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle$ wel een "matrixelement"?

e) Wat is de meetkundige betekenis van een formele, algebraïsche uitdrukking als $|\alpha\rangle\langle\alpha|$?

f) *Waar of niet waar:* "De waarden van fysische grootheden A en B kunnen alleen tegelijk bekend worden (via meting) als $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$".

g) Wat is de onbepaaldheid van de massa m van een kort bestaand deeltje (levensduur τ?)

h) Hoe groot is de "Bohr straal" ongeveer?

i) Wat is de degeneratie van het rotatie-energieniveau bij baanimpulsmoment l van een diatomisch molecuul?

j) Ik meet de z-component van de spin van een electron en vind $+\hbar/2$. Vervolgens meet ik de x-component en direct daarna wéér de z-component. Wat is de kans om bij de laatste meting wéér de waarde $+\hbar/2$ te vinden?

Opgave 2

We beschouwen een deeltje met spin $\frac{3}{2}\hbar$. De gemeenschappelijke eigentoestanden van de operatoren $\hat{S}^2$ en $\hat{S}_z$ noemen we $|+\frac{3}{2}\rangle$, $|+\frac{1}{2}\rangle$, $|-\frac{1}{2}\rangle$, $|-\frac{3}{2}\rangle$ en we representeren ze als de basisvectoren $\{1,0,0,0\}$,$\{0,1,0,0\}$,$\{0,0,1,0\}$ en $\{0,0,0,1\}$.

a) Laat zien dat (in het algemeen, dus ook voor spin $\frac{3}{2}\hbar$)

$$\hat{S}_\mp \hat{S}_\pm = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2 \mp \hbar \hat{S}_z.$$

b) Laat zien dat (in het algemeen, dus ook voor spin $\frac{3}{2}\hbar$)

$$(\hat{S}_\mp)^\dagger = \hat{S}_\pm.$$

c) Laat zien dat (in het algemeen, dus ook voor spin $\frac{3}{2}\hbar$)

$$\hat{S}_\pm |s,m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s, m\pm 1\rangle.$$

(Gebruik de resultaten van de onderdelen **a** en **b**).

d) Stel de matrixrepresentaties van $\hat{S}_\pm$ op, gebruik makend van het resultaat van onderdeel **c**.

e) Laat zien dat de matrixrepresentaties van $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$ gegeven worden door

$$\hat{S}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S}_y = \mathrm{i}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

gebruik makend van het resultaat van onderdeel **d**.

f) Bereken $\hat{S}_x|m\rangle$. Wat is de fysische betekenis van de uitkomst?

g) Wat zijn de eigenwaarden van de operatoren $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$? (Verspil geen tijd met rekenen!)

Opgave 3

De drie-dimensionale harmonische oscillator is separeerbaar in Cartesische coördinaten. De stationaire toestanden zijn dus

$$\psi_{n_x n_y n_z} = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z), \quad n_{x,y,z} = 0, 1, 2, \ldots,$$

waarbij $\psi_n(x)$ de stationaire toestanden van de één-dimensionale oscillator voorstellen. De bijbehorende energieniveau's zijn

$$E_{n_x n_y n_z} = (\frac{3}{2} + n_z + n_y + n_z)\hbar\omega.$$

We beschouwen nu een systeem van twee deeltjes zonder interactie waarbij ieder afzonderlijk deeltje door de bovengenoemde harmonische oscillator beschreven wordt. Vind de golffunctie (uitgedrukt in de golffuncties $\psi^A_{n_x n_y n_z}$ en $\psi^B_{n_x n_y n_z}$ van de afzonderlijke deeltjes), de energie en de ontaarding van het grondniveau en het eerste aangeslagen niveau voor het geval dat

a) De deeltjes onderscheidbaar zijn.

b) De deeltjes niet onderscheidbare bosonen zijn.

c) De deeltjes niet onderscheidbare fermionen zijn.

N.B.: Voor deze opgave mag u de deeltjes als "spinloos" en ongeladen beschouwen!