Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-202b werd in 2005/2006 gegeven door Dhr. J. Koenderink.

Uitwerking[1] Quantummechanica 1 (NS-202b) 10 november 2005

Opgave 1

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Waarom heeft een in een eindig interval opgesloten deeltje een grondtoestand van eindige energie?

b) Welke eisen moeten aan de golffunktie gesteld worden en waarom?

c) Op welke manier en in hoeverre kan de golffunktie enige fysische betekenis krijgen, ook als men complexe waarden moet toelaten?

d) Waarom wordt de "δ–funktie put" wel met een "*ondiepe* put" vergeleken?

e) Wordt het "instorten van de golffunktie" (E: "*collapse of the wavefunction*") door de Schrödingervergelijking beschreven? Zowèl, hoe dan? Zo niet, waardoor dan?

f) Wanneer heeft de golffunktie een oscillerend en wanneer een monotoon karakter?

g) Wat wordt bedoeld met "tunneling"? Is er een klassiek analogon?

h) Wanneer gaat de "merkwaardig product regel" $A^2 + B^2 = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)$ op voor operatoren A en B (niet méér dan één of twee regels afleiding!).

i) Bereken (niet meer dan één of twee regels afleiding!) de commutator $[x, p]$.

j) Waarom is het begrip "simultane meting van twee fysische grootheden" in de quantummechanica wèl problematisch en klassiek niet?

Opgave 2

Beschouw het systeem van het "deeltje in een doosje", d.w.z., een gebonden deeltje (potentiële energie $V(x) = 0$ voor $0 < x < L$, elders ∞). De massa van het deeltje is m.

a) Laat zien dat het energieschema gegeven is door

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\, n^2, \quad n = 1, 2, \dots\ ,$$

en toon aan dat de stationaire toestanden gegeven worden door

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) .$$

b) Schat met behulp van de onzekerheidsrelatie de energie van de grondtoestand en vergelijk dit met de exacte waarde.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

c) Bereken de onzekerheid in de plaats en in de impuls en controleer de onzekerheidsrelatie van Heisenberg voor de stationaire toestanden als funktie van n. Vergelijk met de klassieke verwachting. (Aanwijzing: Geef van voorkomende constanten aan hoe ze asymptotisch van n afhangen en wat extreme waarden (ongeveer) zijn.)

d) Toon aan dat de klassieke "ratel(hoek–)frequentie" (één periode is één maal heen en weer) gegeven is door

$$\omega_{\text{klassiek}} = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{2m}}.$$

e) Beschouw nu de golffunktie bestaande uit de lineaire combinatie met gelijke coëfficiënten van de n^{de} en de $(n+1)^{\text{ste}}$ toestand voor $n \gg 1$. Bereken de verwachtingswaarde voor de positie als funktie van de tijd. Vergelijk met onderdeel **d**. (Aanwijzing: Het is niet nodig optredende constanten via integratie expliciet te berekenen als je kunt laten zien dat ze toch niet van de tijd afhangen en ongelijk nul zijn!)

Opgave 3

Beschouw de verstrooiïng aan de stap–potentiaal

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{voor } x < 0, \\ V(x) &= V_0 > 0 \quad \text{voor } x \geq 0, \end{aligned}$$

voor een deeltje dat van links ($-\infty$) komt en kinetische energie $E > 0$ heeft.

a) Los de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking voor $x < 0$ en $x > 0$ afzonderlijk op.

b) Stel de randvoorwaarden in $x = 0$ op. Hoe gebruiken we de randvoorwaarden in $x = \pm\infty$?

c) Schrijf nu de golffunktie op. Waarom is ze niet normeerbaar? Welke aspecten van de golffunktie blijven noodzakelijk onbepaald? Waarom heeft dit geen fysische consequenties?

d) Wat zijn de reflectie en transmissiecoëfficiënten? Bespreek het verloop als funktie van de kinetische energie van het deeltje.

e) Laat zien dat de transmissie in het geval $E < V_0$ nul is. Hoe kan het dan dat de *golffunktie* toch *ongelijk nul* is op het oneindig interval $(0, +\infty)$?

Ter herinnering:

(Aanwijzing: Onderstaande relaties en definities kunnen gebruikt worden, maar het is (natuurlijk!) niet per se *noodzakelijk* er één of meer te gebruiken!)
Formele relaties:

$$\int z^n \sin z \, \mathrm{d}z = -z^n \cos z + n \int z^{n-1} \cos z \, \mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\int z^n \cos z \, \mathrm{d}z = z^n \sin z - n \int z^{n-1} \sin z \, \mathrm{d}z, \tag{2}$$

$$\ln \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2^{2n-1} \, (2^{2^n} - 1) B_{2n}}{n(2n)!} \, z^{2n}, \tag{3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mt}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-m}. \tag{4}$$

Natuurkundige definitie:

$$J(x,t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \tag{5}$$