Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In electronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Es^2.
Het college QME1a werd in 2000/2001 gegeven door Prof. Dr. H.W. de Wijn.

Quantummechanica 1a (QME1a)
21 augustus 2001

Opgave 1 Eendimensionale rechthoekige put

Een deeltje met massa m beweegt in een eendimensionale rechthoekige put gegeven door de potentiaal $V(x) = 0$ voor $-a < x < +a$ en $V(x) \to \infty$ daarbuiten.

a) Bereken de eigenwaarden E_n en de eigenfuncties $\psi_n(x)$ van de enrgie.

b) Waarom moet $\psi_n(x)$ nul zijn voor $x = \pm a$?

c) Wat is de pariteit van de eigentoestanden?

d) Waarom noemen we ze stationair?

e) En waarom heeft de laagste eigentoestand een energie ongelijk nul?

f) Bereken voor de laagste eigentoestand de verwachtingswaarden van x, x^2, p_x en p_x^2.

$$\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\pi; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \xi^2\cos^2\xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{24}\pi^3 - \frac{1}{4}\pi\right]$$

g) Leid vervolgens voor het onderhavige geval de onzekerheidsrelatie van Heisenberg af.

h) We nemen aan dat op tijdstip $t = 0$ de golffunctie van het deeltje zich bevindt in de lineare combinatie $\Psi(x, 0) = N[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$ van de grondtoestand en de laagste toestand daarboven. Hoe groot is de normeringsconstante n?

i) Hoe ontwikkelt $Psi(x, t)$ zich met de tijd?

j) En hoe ontwikkelt zich de waarschijnlijkheidsdichtheid $P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$? Schets $P(x, t)$ voor $t = 0$ en enkele latere tijdstippen.

k) Wat is de verwachtingswaarde $\langle E\rangle$ van de energie in de toestand $\Psi(x, t)$? Toon ook aan dat $\langle E\rangle$ niet van de tijd afhangt.

l) En wat is in deze toestand het resultaat van een meting van de energie? En van een daaropvlgende meting van de energie?

Opgave 2 Gedeeltelijke reflectie door patentiaalstap: "brekingsindex"

In tegenstelling tot de klassieke mechanica, loop in de quantummechanica een deeltje de kans gedeeltelijk gereflecteerd te worden door een potentiaalsprong ook als zijn energie groter is dan de potentiaal. Analoog aan de optica kan de kans hiertoe worden uitgedrukt met behulp van de "brekingsindex."

Om dit aan te tonen beschouwen we een deeltje met massa m dat vanuit negatieve x-richting komend beweegt in een potentiaal die bij $x = 0$ stapsgewijze toeneemt of afneemt, d.w.z. $V(x)$ voor $x < 0$ en $V(x) = V_0$ voor $x > 0$. Het deeltje heeft enrgie $E > \max(0, V_0)$.

a) Laat zien dat voor zowel $x < 0$ als $x > 0$ de eigenfunctie van het deeltje geschreven kan worden als een superpositie van lopende golven, d.w.z. $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$ met

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}, \quad &(x < 0) \\ \psi(x) &= Ce^{+ik'x}, \quad &(x < 0) \end{aligned}$$

waarbij vast is aangenomen dat het deeltje, eenmaal voorbij de potentiaalsap, nooit meer terugkeert. Druk k en k' uit in E en V_0.

b) Aan welke voorwaarde moet worden voldaan om de eigenfuncties voor $x < 0$ en $x > 0$ met elkaar te verbinden in het punt $x = 0$?

c) Leid vervolgens af dat

$$\frac{B}{A} = \frac{k - k'}{k + k'} \quad \text{en} \quad \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + k'}.$$

d) Laat zien dat de waarschijnlijkheidsstroomdichtheid gelijk is aan

$$\begin{aligned} j &= v(|a|^2 - |b|^2), \quad &(x < 0) \\ j &= v'|C|^2, \quad &(x > 0) \end{aligned}$$

waarin $v = \hbar k/m$ en $v' = \hbar k'/m$. $[j = (\hbar/2mi)[\psi^*(\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x) - (\mathrm{d}\psi^*/\mathrm{d}x)\psi]]$

e) Geef vervolgens uitdrukkingen voor de reflectie- en transmissiecoëfficienten R en T. Laat ook zien dat $R + T = 1$.

f) Het is mogelijk, analoog aan de optica, een "brekingsindex" te definiëren volgens $n = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k'}{k}$. Toon aan dat

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \quad \text{en} \quad T = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

g) Bespreek kort enkele bijzondere gevallen van deze uitdrukkingen.