Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-202B werd in 2004-2005 gegeven door Dr. J Koenderink.

# Hertentamen Quantummechanica 1a/b (NS-202B)
# 23 maart 2005

## Opgave 1 (voor wie alléén QM1a doet)

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Wat is de fysische dimensie van de waarschijnlijkheidsstroom voor een deeltje in één dimensie?

b) Geef een voorbeeld van een golffunctie waarbij $\Delta x \Delta p$ ongeveer 100 $\hbar$ is. Is dit in tegenspraak met Heisenberg's "onzekerheidsrelatie"?

c) Waarom is het begrip "*simultane meting van twee (of meer) grootheden?*" in de quantummechanica problematisch?

d) Wat bedoelt men met de "klassieke limiet"? Hoe ga ik na of in een bepaald geval de klassieke beschrijving zal voldoen of quantummechanische behandeling vereist is?

e) Welke eisen dient men aan de "golffunctie" te stellen en waarom?

f) Waarom wordt de delta-functie potentiaal V(x) = -$\alpha\delta$(x-$x_0$) ($\alpha$ 0) wel met een "ondiepe put" vergeleken?

g) Wat is het verschil tussen "groepsnelheid" en "fasesnelheid"? Is de één noodzakelijk groter of kleiner dan de ander? Hoe zit dat in de quantummechanische beschrijving van het "vrije deeltje"?

h) Karakterizeer "verstrooide" en "gebonden" toestanden.

i) Wat is de betekenis (indien die inderdaad bestaat) van *stationaire* toestanden voor processen die *niet* stationair zijn?

j) Wat wordt bedoeld met "tunneling"?

## Opgave 2 (voor wie alléén QM1a doet)

Een deeltje met massa $m$ beweegt in een "dubbele delta potentiaal"

$$V(X) = -V_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \text{met} V_0 > 0.$$

We beschouwen alleen het geval van negatieve kinetische energieën E $<$ 0.

a) Schrijf de Schrödingervergelijking voor dit probleem op en geef de algemen oplossing voor $|x| \neq a$. Schrijf deze oplossing voor het gemak in termen van $k$:

$$k^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

b) Waarom mogen we ons beperken to even (notatie $\psi_+$(x)) en oneven (notatie $\psi_-$(x)) oplossingen? Gebruik de randvoorwaarden in het oneindige om aan te tonen dat:

$$\psi_+(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} \\ Bcosh(kx) \\ Ae^{+kx} \end{cases} \quad \psi_-(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & x > a \\ Bsinh(kx) & -a < x < a \\ -Ae^{+kx} & x < -a \end{cases}$$

c) Gebruik nu de coninuïteit in $|x|$ = a om A in B uit te drukken. Laat vervolgens zien dat de disconinuïteits condities $\Delta(d\psi/dx)_{x_0} = -2m\alpha\psi(x_0)/\hbar^2$ voor de eerste afgeleiden (bedenk dat het voldoende is x = a te beschouwen!) aanleiding geven tot de condities

$$A\left(\frac{2mV_0}{k\hbar^2} - 1\right)e^{-ka} = \text{B sinh(ka) voor } \psi_+.$$

en

$$A\left(\frac{2mV_0}{k\hbar^2} - 1\right)e^{-ka} = \text{B cosh(ka) voor } \psi_-.$$

vorm deze condities om tot transcedente vergelijkingen voor k. Waarom blijft A of B noodzakelijk onbepaald en hoe moeten we hiermee omgaan?

d) Geef een grafisch argumemnt dat er altijd precies één oplossing voor de even golffunctie is te vinden en dat

$$-\frac{2mV_0^2}{\hbar^2} < E_+ < -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

Doe verder geen moeite de vergelijkingen op te lossen.

*Opmerking:* Het is handig tijdelijk de variabelen y = ka en $\gamma$ = 2maV$_0/\hbar^2$ in te voeren bij de bespreking van de transcedente vergelijkingen.

## Opgave 3 voor wie alléén QM1a òf zowel QM1a als QM1b doet

Beschouw een deeltje met massa $m$ in een oneindige één-dimensionale potentiaal V(x) = 0 voor $-\frac{a}{2} < x < +\frac{a}{2}$ en V(x) = $\infty$ voor $|x| > \frac{a}{2}$ voor zeker lengte a > 0.

a) Laat zien dat de stationaire toestanden gegeven worden door

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} sin \left[ n\pi \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

met bijbehorende energieën

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

voor gehele n,

b) Waarom komen energieniveaus E $\leq$ 0 niet voor? Waarom mogen we ons beperken to n > 0?

c) Lat het deeltje op tijdstip t = 0 in de toestand

$$\Psi(x, 0) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)$$

verkeren. Waarom moet $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ =1 zijn? Zijn er verder beperkingen aan $\alpha$, $\beta$? Zijn alle toestanden met verschillende $\{\alpha, \beta\}$ ook fysisch verschillend? Zo nee, waarom niet?

d) Bereken de golffunctie $\Psi(x, t)$ op tijden t > 0.

## Opgave 4 (voor wie alléén QM1b doet)

Voor elk van de volgende vragen kan een bondig antwoord volstaan (wees zo volledig als nodig is maar vermijd irrelevante uitweidingen).

a) Wat is de wiskundige en wat de fysische betekenis van een “bra” en een “ket”?

b) Welke eisen dient men aan de operator voor een fysische grootheid te stellen en waarom?

c) Geef het fysische en het formele verschil tussen “baanimpulsmoment” en “spin” aan.

d) Wat was de betekenis van het Stern-Gerlach experiment?

e) Hoe zal de straal van de laagste Bohr baan verschillen voor het H-atoom en het $He^{+}$-ion?

f) Wat is het klassieke verband tussen (hoek)impulsmoment en magnetisch moment en hoe zit dat voor het elektron.

g) Beschrijf de “singlet” en “triplet” toestanden voor een systeem van twee elektronen.

h) Wat verstaat men onder ee “matrix element”, hoe schrijft men het in de Dirac notatie, en wat is (zijn) de fysische betekenis(sen) ervan?

i) Een elektron is opgesloten in een bolvormige holte met diameter 1 Å. Schat ruwweg de waarde van de energie van de grondtoestand in eV.

j) Wat stellen de Clebsch-Gordan coefficiënten precies voor?

## Opgave 5 (voor wie alléén QM1b òf zowel QM1a als M1b doet)

Beschouw de driedimensionale, isotrope, harmonische oscillator potentiaal voor de resonantie(hoek)-frequentie $\omega$:

$$V(\vec{r}) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^{\,2}.$$

a) Wat zijn de energie niveaus en wat is de bijbehorende degeneratiegraad?

b) Er zitten 5 deeltjes in deze potentiaal. Alle deeltjes hebben massa $m$. Er vindt geen wisselwerking tussen de deeltjes plaats. Vind de grondtoestand en de eerste angeslagen toestand voor het geval dat de deeltjes onderscheidbaar zijn.

c) idem voor het geval dat de deeltjes ononderscheidbare bosonen zijn.

d) idem voor het geval dat de deeltjes ononderscheidbare fermionen zijn.

## Opgave 6 (voor wie alléén QM1b òf zowel QM1a als QM1b doet)

We beschouwen een syteem van twee spin-één deeltjes. De deeltjes worden geacht geen onderlinge wisselwerking te hebben. We geven de toestand van één deeltje aan met $|+>$,$|0>$ en $|->$.

a) Geef redenen waarom het redelijk is te veronderstellen dat $|++>$ wel een eigentoestand van de totale spin $\widehat{S}^2$ en $\widehat{S}_z$ moet zijn. Wat zal in dit geval de spin van het syteem zijn? Zal de totale spin ook ander waarden kunnen aannemen In deze opgave onderzoeken we het geval $|++>$ verder.

b) Controleer de onderstelling uit **a** via directe berekening.

c) Wat verwacht je bij herhaalde toepassing van de op- en neer-operatoren $\widehat{S}_\pm$ op de toestand $|++>$ en waarom?

d) Laat nu door expliciete bereking zien dat alle eigentoestanden van het systeem gegeven zijn door:

$$
\begin{aligned}
&|++> \\
&\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|0+>+|+0>) \\
&\tfrac{1}{\sqrt{6}}(|-+>+2|00>+|+->) \\
&\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|-0>+|0->) \\
&|-->
\end{aligned}
$$

Kin je deze uitkomst in verband brengen met de “Clebsch-Gordan coefficiënten”?

## Formuleblad Quantummechanica

### Formele relaties

$$\int z^n \sin z \, \mathrm{d}z = -z^n \cos z + n \int z^{n-1} \cos z \, \mathrm{d}z, \tag{1}$$

$$\int z^n \cos z \, \mathrm{d}z = -z^n \sin z - n \int z^{n-1} \sin z \, \mathrm{d}z, \tag{2}$$

$$\ln \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \left(2^{2^n} - 1\right) B_{2n}}{n(2n)!} z^{2n}, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mt}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \tfrac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-m}, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}} \, \mathrm{d}x = n! \, a^{n+1}, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \, \frac{(2n)!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1}, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{2} a^{2n+2} \tag{7}$$

### Natuurkundige definities

$$J(x,t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m} \left( \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right). \tag{8}$$

$$\text{Comptongolflengte van het elektron } \frac{h}{mc} = 0.0242 \text{ Å} \tag{9}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \text{ Js}, \tag{11}$$

$$c = 2.99792 \times 10^{8} \text{ m/s}, \tag{12}$$

$$m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}, \tag{13}$$

$$e = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}, \tag{14}$$

$$\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Jm}, \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 1/137.036, \tag{16}$$

$$-E_1 = \frac{\alpha^2 m_e c^2}{2} = 13.6057 \text{ eV}. \tag{17}$$