Tussentoets NS-251B Electrodynamica, 17 april 2009

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

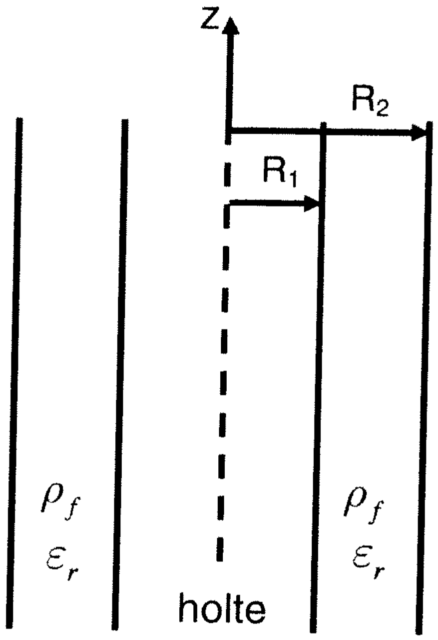
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

Opgave 1

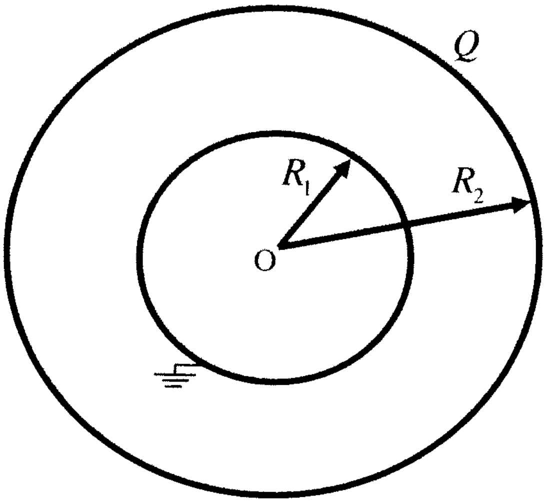
Een oneindig lange cilinder bestaat uit diëlektrisch materiaal met een holte in het midden. De centrale as van de cilinder valt samen met de z-as; de afstand tot de z-as geven we aan met de straal r. In de figuur is een lengtedoorsnede van een stuk van de cilinder weergegeven. Het diëlektrische materiaal bevindt zich tussen $r = R_1$ en $r = R_2$, is van het type LIH met relatieve permittiviteit ε_r en is geladen met een homogene, positieve ladingsdichtheid ρ_f. In de holte ($r < R_1$) en buiten de cilinder ($r > R_2$) heerst vacuüm.



a) [9 punten] Bepaal het $\vec{D}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte (gebruik symmetrie!).
b) [7 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld en de polarisatievektor $\vec{P}$ overal in de ruimte.
c) [7 punten] Hoe groot is de gebonden volumeladingsdichtheid ρ_b? Zijn er gebonden oppervlakteladingsdichtheden? Zo ja, hoe groot zijn ze en waar zitten ze?
d) [5 punten] Laat door berekening zien dat in een stuk cilinder met lengte l de totale gebonden lading gelijk aan nul is.
e) [7 punten] Bereken het potentiaalverschil tussen de centrale as en de buitenrand van de cilinder (dus $V(r = 0) - V(r = R_2)$).

Opgave 2

Twee zeer dunne, geleidende bolschillen zijn concentrisch opgesteld. De binnenbol heeft straal R_1 en is geaard. De buitenbol heeft straal R_2 en bevat een homogeen verdeelde, positieve lading Q. De oorsprong kiezen we in het middelpunt van de bolschillen.



a) [7 punten] Voor $r > R_1$ kunnen het $\vec{E}$-veld en de potentiaal V berekend worden uit twee concentrische bolschillen met homogeen verdeelde ladingen: de bolschil met straal R_2 en totale lading Q en een bolschil met straal $R_3 = R_1^2/R_2$ en totale lading $Q' = -R_1 Q/R_2$. Leg uit waarom dit op deze manier gedaan mag worden.

b) [7 punten] Bereken het $\vec{E}$-veld overal in de ruimte.

c) [7 punten] Hoe groot is de elektrostatische energie die in dit systeem is opgeslagen?

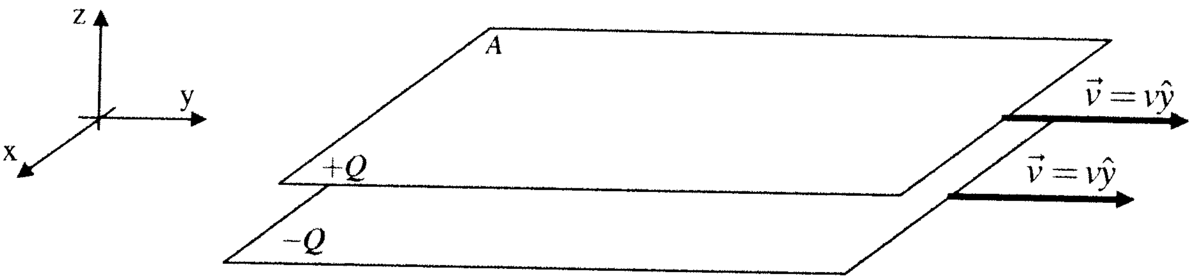
De aarding van de binnenste bolschil wordt nu verbroken en er wordt een lading $-Q$ op aangebracht (de lading op de buitenste bolschil blijft Q).

d) [7 punten] Bepaal de potentiaal V van de binnenste bolschil ten opzichte van het oneindige. Bereken tevens het $\vec{E}$-veld overal in de ruimte.

e) [7 punten] Bereken ook voor deze situatie de elektrostatische energie. Is deze energie meer of minder dan in de vorige situatie (het antwoord bij onderdeel c))?

Opgave 3

Twee zeer grote, evenwijdige platen met oppervlak A bewegen met constante snelheid $\vec{v}$ parallel aan de platen. De bovenste plaat is homogeen geladen met een positieve oppervlakteladingsdichtheid (totale lading $+Q$), de onderste plaat is homogeen geladen met een even grote, maar negatieve oppervlakteladingsdichtheid (totale lading $-Q$). De afstand tussen de platen is zo klein dat randeffecten verwaarloosd mogen worden. Het assenstelsel kiezen we als aangegeven in de figuur, dus met de snelheid van de platen in de y-richting ($\vec{v} = v\hat{y}$) en de richting loodrecht op de platen als z-richting.



a) [6 punten] Bepaal de oppervlakte stroomdichtheidsvectoren $\vec{K}_{+Q}$ en $\vec{K}_{-Q}$ ter plekke van de bewegende platen.

b) [6 punten] Bereken het $\vec{B}$-veld naar richting en grootte tussen de platen, net boven de bovenste plaat en net onder de onderste plaat.

c) [6 punten] Bereken het magnetische deel van de Lorentzkracht tussen de beide platen. Is deze kracht aantrekkend of afstotend?

d) [6 punten] Bereken de elektrostatische kracht tussen de platen.

e) [6 punten] Is er een snelheid waarbij de totale kracht op de platen gelijk is aan nul? Zo ja, bereken deze snelheid.

CARTESISCH $$d\vec{\ell} = dx\ \hat{\imath} + dy\ \hat{\jmath} + dz\ \hat{k}; \quad d\tau = dx\ dy\ dz$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{k}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

SFERISCH $$d\vec{\ell} = dr\ \hat{r} + r d\theta\ \hat{\theta} + r\sin\theta\ d\phi\ \hat{\phi}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

CILINDRISCH $$d\vec{\ell} = dr\ \hat{r} + r\ d\phi\ \hat{\phi} + dz\ \hat{z}; \quad d\tau = r\ dr\ d\phi\ dz$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{z}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$