Tussentoets NS-251B Electrodynamica, 19 april 2006

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

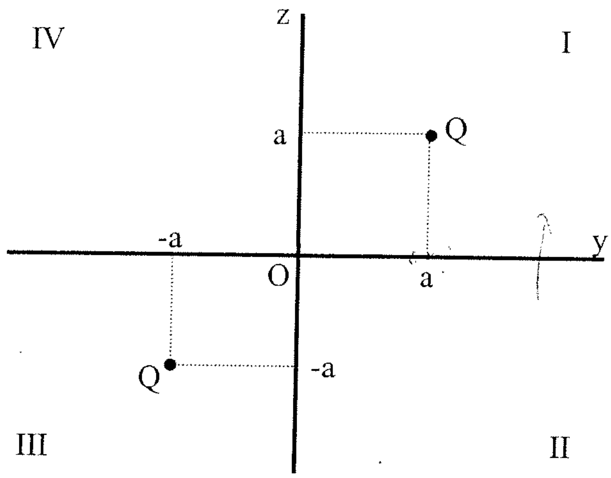
Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

Normering opgaven: alle onderdelen tellen even zwaar mee

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en inleveren

Opgave 1

Twee oneindig grote, geaarde, goed geleidende, metalen platen zijn in vacuüm loodrecht op elkaar geplaatst (een dwarsdoorsnede is weergegeven in de figuur). De platen verdelen de ruimte in 4 gelijke kwadranten. Twee even grote, positieve puntladingen Q staan opgesteld in de kwadranten I en III zoals in de figuur is weergegeven. De afstanden van de puntladingen tot beide platen is a. De oorsprong O en de y- en z-assen zijn gekozen zoals aangegeven. De x-as staat loodrecht op het vlak van tekening en gaat door O.



a) Bepaal het elektrische veld $\vec{E}$ in de kwadranten II en IV.

b) Door welke ladingsverdeling kan het elektrische veld $\vec{E}$ in de kwadranten I en III worden bepaald? Waarom geeft deze ladingsverdeling daar hetzelfde $\vec{E}$ veld als de beide ladingen Q met de metalen platen?

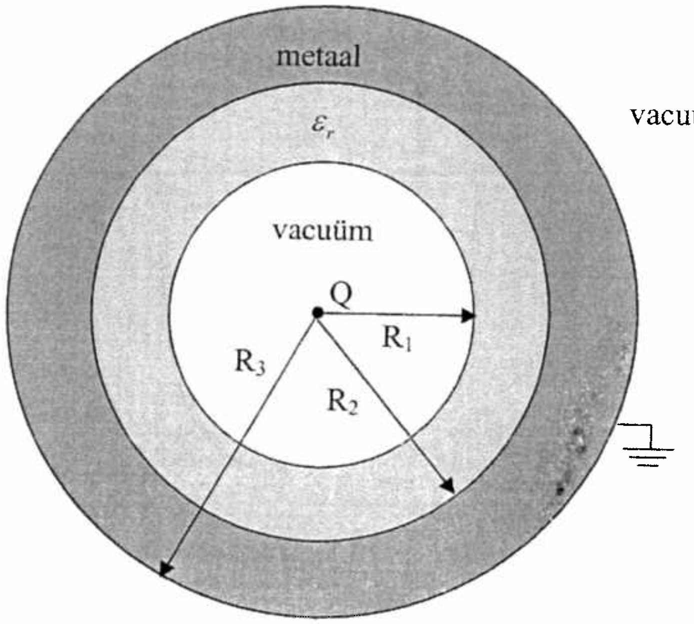
c) Bereken naar richting en grootte de kracht $\vec{F}$ die op de puntlading in kwadrant I wordt uitgeoefend. Bewegen de positieve puntladingen naar elkaar toe of van elkaar af?

d) Hoe is het karakter van het $\vec{E}$ veld op de positieve y-as op grote afstand van de oorsprong?

e) Bereken de geïnduceerde ladingsdichtheid σ overal op de x-as.

Opgave 2

Een positieve puntlading Q is omgeven door een ongeladen, diëlektrische bolschil met binnenstraal R_1 en buitenstraal R_2 (Q zit in het middelpunt van de bolschil; zie figuur). Binnenin de diëlektrische bolschil heerst vacuüm. Het diëlektrische materiaal heeft een relatieve permittiviteit ε_r Aan de buitenkant is de bolschil omgeven door een geaarde, goed geleidende, metalen bolschil met binnenstraal R_2 en buitenstraal R_3. Hierbuiten heerst vacuüm.



a) Hoeveel vrije lading zit er op de metalen bolschil? Geef de plaats waar deze lading zit aan en leg uit waarom.

b) Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{D}$ veld te bepalen. Bereken tevens de grootte van $\vec{D}$ overal in de ruimte.

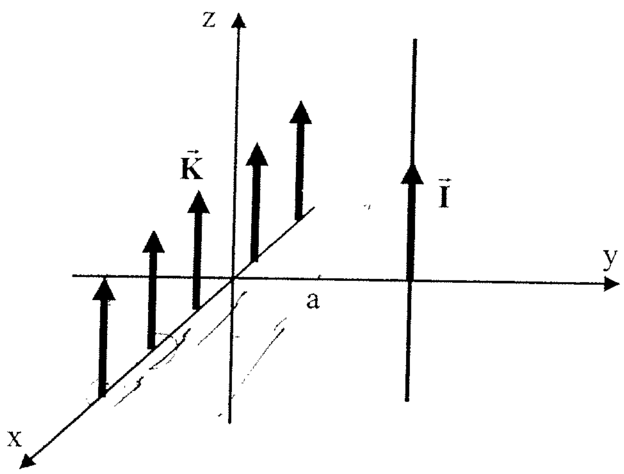
c) Bereken de polarisatievektor $\vec{P}$ in het diëlektricum (denk aan de richting). Hoe groot is het totale dipoolmoment $\vec{p}$ van het diëlektricum?

d) Bereken de gebonden volume- en oppervlakteladingsdichtheden ρ_b en σ_b. Waar zit deze gebonden lading?

e) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ overal in de ruimte naar richting en grootte. Schets het $\vec{E}$ veld als funktie van de afstand r tot de lading Q.

Opgave 3

Over een oneindig groot oppervlak loopt een oppervlaktestroom met stroomdichtheidsvektor $\vec{K}$. We kiezen het xz-vlak als het vlak waar $\vec{K}$ in ligt met de positieve z-richting in de richting van $\vec{K}$ (zie figuur). Parallel aan dit oppervlak, op afstand a, staat een oneindig lange draad opgesteld die een stroom $\vec{I}$ voert (met $\vec{K}$ en $\vec{I}$ parallel).



We bekijken eerst alleen de oppervlakte stroom $\vec{K}$ en het hierdoor veroorzaakte magneetveld $\vec{B}_K$.

a) Geef alle symmetrie-eigenschappen van de oppervlakte stroom en laat zien dat hieruit volgt dat de richting van het veld $\vec{B}_K$ overal in de ruimte de x-richting is. Hoe groot is $\vec{B}_K$ op de x-as?

b) Laat door berekening zien dat $\vec{B}_K$ gegeven wordt door $\vec{B}_K = \pm\frac{\mu_0 K}{2}\hat{x} \quad (y \neq 0)$. Waar is het veld in de positieve x-richting gericht en waar in de negatieve x-richting?

c) Bereken, naar richting en grootte, de kracht per eenheid van lengte die de oppervlakte stroom op de stroomdraad uitoefent.

We bekijken nu het totale magneetveld $\vec{B}_T$ ten gevolge van beide stroomverdelingen ($\vec{K}$ en $\vec{I}$).

d) Geef de uitdrukking voor $\vec{B}_T$ overal in de ruimte.

e) Schets de grafiek voor de grootte van $\vec{B}_T$ op de y-as.

Vectorafgeleides

CARTESISCH $$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{k}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

SFERISCH $$d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

CILINDRISCH $$d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}; \quad d\tau = r\,dr\,d\phi\,dz$$

Gradiënt $$\vec{\nabla} t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{z}$$

Divergentie $$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotatie $$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]\hat{\phi}$$
$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}$$

Laplaciaan $$\nabla^2 t = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$