Tussentoets NS-251B Electrodynamica, 28 mei 2014

Duur: 3 uur

Open-boek tentamen: nee

Formuleblad: ja, 1 verstrekt op tentamen en 1 zelf meegenomen (1 A4)

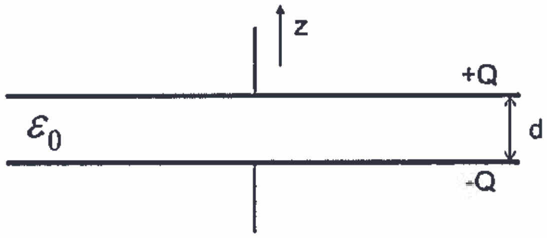
Gebruik van rekenmachine toegestaan

Normering zoals aangegeven in de opgaven

Opgaven 1, 2 en 3 s.v.p. op aparte vellen maken en ieder vel voorzien van naam

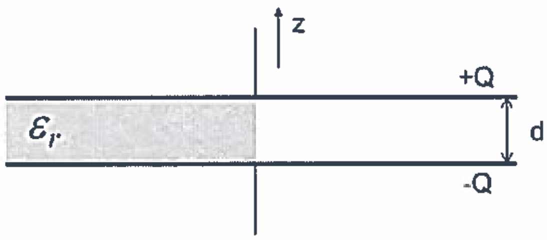
Opgave 1

Een vlakke plaatcondensator is geïsoleerd opgesteld in vacuüm (permittiviteit ε_0). De platen zijn zeer groot en cirkelvormig, zijn gemaakt van goed geleidend materiaal en hebben oppervlak A. De afstand tussen de platen is d, waarbij d veel kleiner is dan de straal van de platen. De bovenste plaat is homogeen geladen met lading +Q, de onderste met lading –Q. Een dwarsdoorsnede van de platen is te zien in onderstaande figuur. We kiezen de z-as loodrecht op de platen.



a. [8 punten] Bepaal het $\vec{D}$ - veld tussen de platen naar richting en grootte. Hetzelfde voor het $\vec{E}$ -veld.
b. [5 punten] Bereken het potentiaalverschil V tussen de bovenste en de onderste plaat.

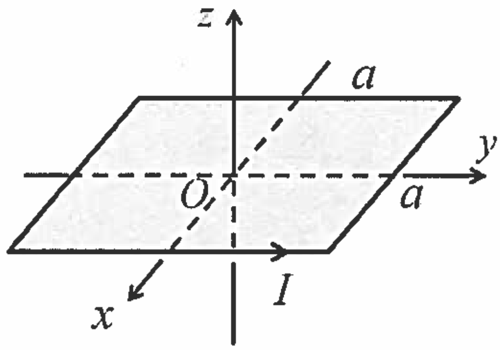
De ruimte tussen beide platen wordt nu voor de helft opgevuld met een LIH diëlektricum met relatieve permittiviteit ε_r zoals in onderstaande figuur. Bedenk dat de ladingen nu niet meer homogeen verdeeld zijn over de platen.



c. [5 punten] Is het $\vec{E}$ -veld overal tussen de platen gelijk? En het $\vec{D}$ -veld?
d. [7 punten] Bepaal de totale lading op de bovenste plaat in het linkerdeel van de condensator (waar diëlektricum aanwezig is) en in het rechterdeel.
e. [10 punten] Bepaal het $\vec{D}$ - en het $\vec{E}$ -veld tussen de platen alsmede het potentiaalverschil tussen de platen.

Opgave 2

Een vierkant draadraam met zijden a staat opgesteld in vacuüm en voert een stroom I. We kiezen het xy-vlak in het vlak van het draadraam met de oorsprong O precies in het midden (zie figuur). De z-as staat hiermee loodrecht op het draadraam.



a. [5 punten] Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{B}$-veld voor alle punten op de z-as te bepalen.
b. [10 punten] Bereken het $\vec{B}$-veld in de oorsprong O. U kunt gebruik maken van onderstaande integraal.
c. [5 punten] Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ van het stroomvoerende draadraam.

Er wordt nu een extern homogeen magneetveld, $B_e\hat{x}$ $(B_e > 0)$, in de richting van de positieve x-as aangelegd.

d. [5 punten] Bereken het koppel $\vec{N}$ dat op het draadraam wordt uitgeoefend. Bepaal tevens de energie van het draadraam in dit magneetveld.

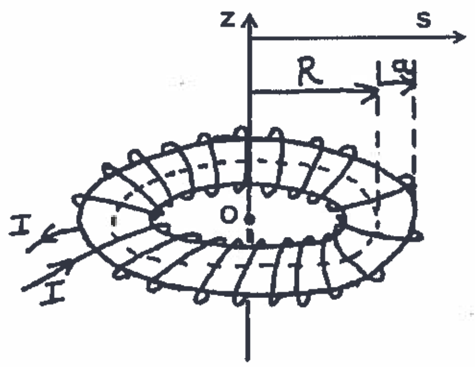
Er wordt een tweede, cirkelvormig draadraam precies in bovenstaand draadraam gepast met middelpunt in de oorsprong O en diameter a.

e. [10 punten] Welke stroom moet er door dit draadraam worden gestuurd dusdanig dat het totale magnetische dipoolmoment (van beide draadramen) gelijk 0 is?

Gegeven: $\int \frac{dx}{\left(b^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{b^2\left(b^2+x^2\right)^{1/2}}$

Opgave 3

Een dichtgewonden toroïdale spoel met N windingen is in vacuüm geplaatst en voert een stroom I. De hartlijn van de spoel is een cirkel met straal R. Alle windingen zijn cirkelvormig met straal a (zie onderstaande tekening). We kiezen de z-as loodrecht op de spoel met de oorsprong O precies in het midden van de hartlijn. De afstand van een willekeurig punt in de ruimte tot de z-as geven we aan met s.



a. [6 punten] Bepaal het magneetveld $\vec{B}$ overal in de ruimte naar richting en grootte.
b. [6 punten] Het $\vec{B}$-veld binnenin de spoel is niet constant. Bereken het verschil tussen het maximale en het minimale veld, dus $B_{max} - B_{min}$.

De spoel wordt nu gevuld met LIH paramagnetisch materiaal met relatieve permeabiliteit μ_r.

c. [6 punten] Bepaal eerst het $\vec{H}$-veld overal in de ruimte naar richting en grootte en hieruit opnieuw het $\vec{B}$-veld.
d. [6 punten] Bereken de magnetisatie $\vec{M}$ van het paramagnetische materiaal en hiermee de gebonden stroomdichtheidsvektoren $\vec{J}_b$ en $\vec{K}_b$.
e. [6 punten] Bereken de totale gebonden stroom door het $z = 0$ vlak.

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla\times\mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$