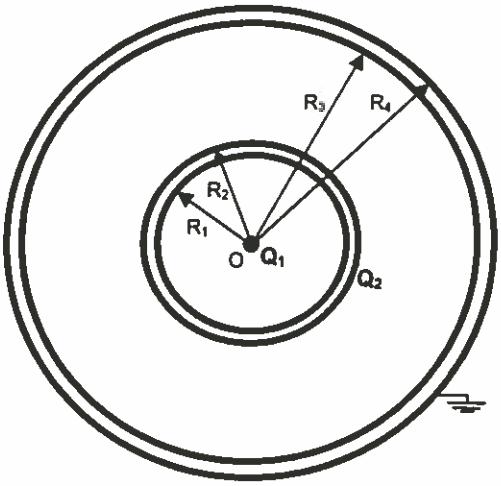
m-251b 18-4-2006

(2) Elektrodynamica

Opgave 1

Twee geleidende bolschillen zijn concentrisch opgesteld. We kiezen de oorsprong O in het middelpunt van de bolschillen en geven de afstand tot O aan met r. De stralen van binnen- en buitenwand van de binnenste bolschil geven we aan met respectievelijk R_1 en R_2, van de buitenste bolschil met R_3 en R_4 (zie figuur). In de oorsprong wordt een positieve puntlading Q_1 geplaatst; op de binnenste bolschil een positieve lading Q_2 aangebracht. Overal elders in de ruimte heerst vacuüm. De buitenste bolschil is aanvankelijk geaard; deze potentiaal is gelijk aan die in het oneindige en wordt 0 gekozen.



a) [5 punten] Geef aan hoeveel lading er op de binnen- en buitenwanden van beide bolschillen zit.

b) [10 punten] Bepaal het $\vec{E}$ -veld overal in de ruimte naar richting en grootte. Schets de grootte van $\vec{E}$ als functie van r.

c) [10 punten] Bereken overal in de ruimte de potentiaal V. Schets V als functie van r.

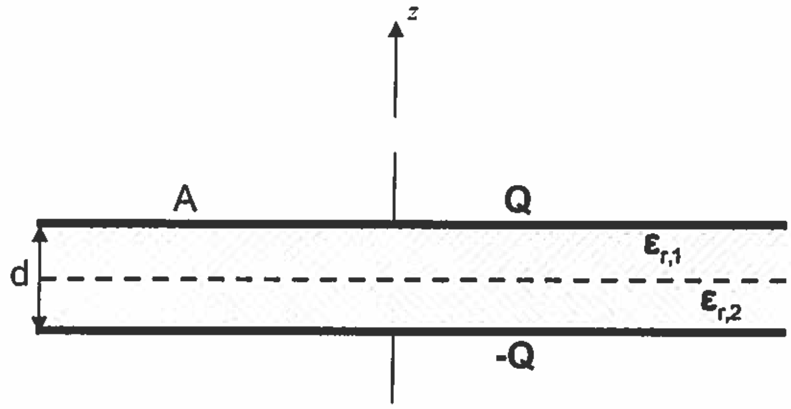
De aarde van de buitenste bolschil wordt nu verbroken en deze wordt op potentiaal V_0 gebracht (t.o.v. het oneindige waar de potentiaal nog steeds 0 is).

d) [5 punten] Gebruik de potentiaal V_0 om de lading Q op de buitenwand van de buitenste bolschil te bepalen. Verandert de rest van de ladingsverdeling of blijft deze hetzelfde?

e) [5 punten] Schets opnieuw de grootte van $\vec{E}$ als functie van r. Doe hetzelfde voor de potentiaal V.

Opgave 2

Een vlakke-plaat condensator bestaat uit twee zeer grote, evenwijdige, geleidende platen. Het oppervlak van de platen geven we aan met A, de onderlinge afstand met d (d is klein vergeleken met de afmetingen van de platen zodat randeffecten kunnen worden verwaarloosd). Op de bovenste plaat is een positieve, vrije lading +Q aangebracht, op de onderste plaat een vrije lading –Q. De bovenste helft van de ruimte tussen de platen is gevuld met een diëlectricum met relatieve permittiviteit $\varepsilon_{r,1}$, de onderste helft met een diëlectricum met relatieve permittiviteit $\varepsilon_{r,2}$ (met $\varepsilon_{r,2} > \varepsilon_{r,1}$). Beide diëlectrica zijn lineair, isotroop en homogeen.



a) [6 punten] Bepaal het $\vec{D}$-veld naar richting en grootte tussen de platen.

b) [6 punten] Bepaal het $\vec{E}$-veld tussen de platen.

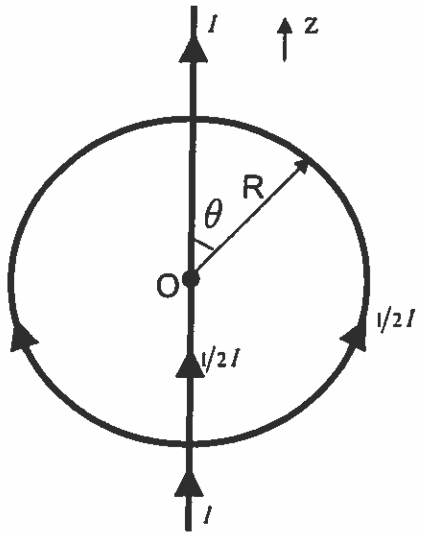
c) [6 punten] Bepaal de polarisatievector $\vec{P}$ in beide diëlektrica.

d) [6 punten] Hoe groot zijn de gebonden ladingsdichtheden ρ_b en σ_b? Is de totale gebonden ladingsdichtheid precies op de overgang tussen de beide diëlektrica positief of negatief?

e) [6 punten] Bereken de capaciteit van deze condensator. Controleer uw antwoord voor het geval er zich geen diëlektrica tussen de platen bevinden.

Opgave 3

Een oneindig lange, dunne draad voert een stroom I. Op één plaats is de draad omgeven door een geleidend boloppervlak met straal R en middelpunt precies op de draad. We kiezen de z-as langs de stroomdraad en de oorsprong O in het middelpunt van de bol (voor een dwarsdoorsnede, zie figuur). Bij het boloppervlak splitst de stroom precies in tweeën: de ene helft loopt verder door de draad, de andere helft over het boloppervlak als een oppervlakte stroomdichtheid $\vec{K}$. Aan de andere zijde van het boloppervlak komen de stromen weer samen tot een totale stroom I in de draad. Gebruik in deze opgave sferische coördinaten.



a) [5 punten] Geef alle symmetrie-eigenschappen van deze stroomverdeling. Wat is het gevolg voor de richting van het $\vec{B}$-veld?

b) [10 punten] Bereken het $\vec{B}$-veld overal in de ruimte.

c) [5 punten] Bepaal de oppervlakte stroomdichtheid $\vec{K}$ op een willekeurige plaats op het boloppervlak.

d) [10 punten] Doordat de stroom over het boloppervlak zich in een $\vec{B}$-veld bevindt wordt er een kracht op uitgeoefend. Bepaal de richting van deze kracht en de grootte per eenheid van oppervlakte.

e) [5 punten] Wanneer meer dan de helft van de stroom over het boloppervlak loopt, wordt de kracht op het boloppervlak per eenheid van oppervlakte dan groter, kleiner of blijft deze gelijk? Zelfde vraag wanneer er minder stroom over het boloppervlak loopt.

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$; $\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}}$$
$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}$; $\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$