Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-251b werd in 2004/2005 gegeven door Dr. P.A. Zeijlmans van Emmichoven.

Uitwerking[1] Elektrodynamica (NS-251b)
22 april 2005

N.B. Alle opgaven wegen even zwaar.

Opgave 1

Een bolvormig LIH diëlektricum met straal R heeft relatieve permittiviteit ε_r. De bol is geladen met een (vrije) positieve lading Q die als ruimtelading homogeen over het bolvolume verdeeld is.
De permittiviteit van het vacuüm is ε_0.

a) Gebruik symmetrie om de richting van het $\vec{D}$-veld te bepalen. Bereken de grootte van $\vec{D}$ overal in de ruimte.

b) Bepaal richting en grootte van het $\vec{E}$-veld en de polarisatievector $\vec{P}$ overal in de ruimte.

c) Zitten er sprongen in $\vec{D}$ of $\vec{E}$? Zo ja, verklaar deze.

d) Hoe groot zijn de gebonden oppervlakte-ladingsdichtheid σ_b en volume-ladingsdichtheid ρ_b? Hoe is de totale lading over de bol verdeeld wanneer ε_r zeer groot is?

e) Bereken de potentiaal V in het centrum van de bol t.o.v. oneindig.

Antwoorden:

a) Elk vlak door M is een symmetrievlak voor de ladingsverdeling en $\vec{D}$ ligt in elk vlak. Dus $\vec{D}$ is radiaal gericht.

$$\begin{array}{lll} r < R & \oint \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q^f_{\text{end}} \quad \Rightarrow & \vec{D} = \frac{Qr}{4\pi R^3}\,\hat{r} \\ r > R & \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{r} & \end{array}$$

b)

	$\vec{D}$	$\vec{E}$	$\vec{P}$
$r < R$	$\frac{Qr}{4\pi R^3}\,\hat{r}$	$\frac{Qr}{4\pi\varepsilon R^3}\,\hat{r}$	$\frac{Qr}{4\pi R^3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\hat{r}$
$r > R$	$\frac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{r}$	$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}$	0

c) Er zit geen sprong in D, want er is geen σ_{free}. Er zit wel een sprong in E, want er is wel σ_{bound}.

d)

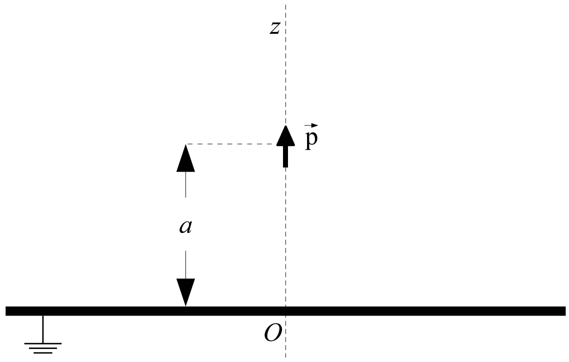
$$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{Qr}{4\pi R^3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = -\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Gebonden lading is net zo egaal als vrije lading verdeeld ($\varepsilon_r \gg 1$ betekent vrije lading aan de rand).

e)

$$V = -\int_\infty^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_R^0 \frac{Qr}{4\pi\varepsilon R^3}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_r}\right)$$



Opgave 2

Een dipool $\vec{p}$ is loodrecht en op afstand a boven een oneindig grote, vlakke, geaarde geleider geplaatst (zie figuur). De afstand a is zeer groot vergeleken met de dimensies van de dipool. Kies de z-as door de dipool en het snijpunt van de z-as met de geleider als oorsprong O.

a) Met welk systeem van dipolen in vacuüm kan het $\vec{E}$-veld in de ruimte boven de geleidende plaat beschreven worden (bedenk dat een fysische dipool bestaat uit een positieve en een negatieve lading)?

b) Bepaal in benadering van het $\vec{E}$-veld in de bovenste halfruimte op zeer grote afstand van de dipool en de oorsprong.

c) Werkt er een kracht op de dipool? Zo ja, in welke richting en hoe groot? En een koppel?

d) Bereken de oppervlakte-ladingsdichtheid $\sigma(O)$ op de geleider in de oorsprong.

e) Schets de ladingsdichtheid $\sigma(r)$ op de geleidende plaat als functie van de afstand r tot de oorsprong.

   Hoe groot is de totale lading op de plaat?

Antwoorden:

a) Het $\vec{E}$-veld kan beschreven worden als een systeem van twee gelijkgerichte dipolen op afstand $2a$ van elkaar.

b) Voor $z \gg a$ geldt in eerste orde benadering dat beide dipolen in O staan.

$$\text{Dus } \vec{E} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right\}.$$

c) $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$

   Neem O in de bovenste $\vec{p}$.

   $F = p \cdot \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{z^3}\right) = \dfrac{p^2}{2\pi\varepsilon_0} \cdot -\dfrac{3}{z^4}\hat{z}.$

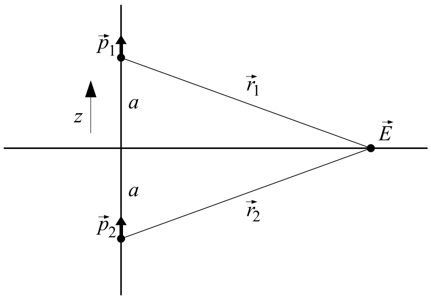
   met $z = za \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \dfrac{-3p^2}{32\pi\varepsilon_0 a^4}\hat{z}$. Deze kracht is *aantrekkend.*

   $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{p} \parallel \vec{E}.$

d)

$$\vec{E}(O) = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\vec{p}}{a^3} = \frac{p}{\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{p}{\pi a^3}$$

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl



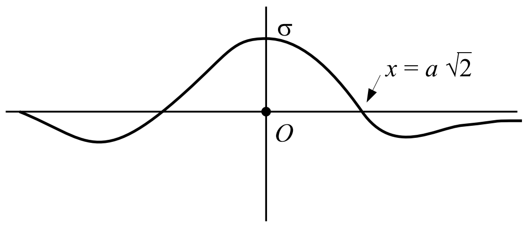
e)

$$\vec{E}_1 = \frac{P_1}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{3 \cdot -a\hat{r}_1}{\sqrt{x^2+a^2}} - \hat{z} \right\}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{P_2}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{3 \cdot +a\hat{r}_2}{\sqrt{x^2+a^2}} - \hat{z} \right\}$$

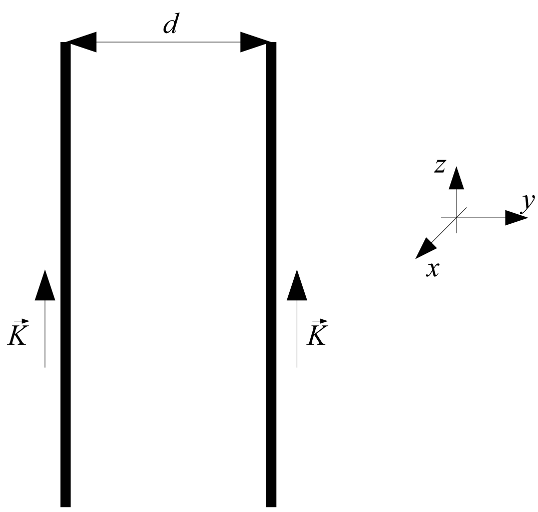
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{2a^2 - x^2}{a^2+x^2} \right\} \hat{z} \quad \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{P}{2\pi a^3} \left(\frac{2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right)$$



Opgave 3

Over beide buitenoppervlakken van een oneindig grote, vlakke, massieve plaat met dikte d lopen gelijke, vrije stromen met oppervlakte-stroomdichtheidsvectoren $\vec{K} = K\hat{z}$ (met K positief). De z-as is langs de stroomrichting gekozen, de y-as wordt loodrecht op de plaat gekozen en de x-as loodrecht op het vlak van tekening. Een dwarsdoorsnede van een stukje van de plaat met de stromen is weergegeven in de figuur. In de onderdelen a) t/m d) mag de magnetische susceptibiliteit van het plaatmateriaal verwaarloosbaar klein genomen worden (d.w.z. $\chi_m = 0$).



a) We beschouwen eerst het veld van de rechter stroomverdeling ($\vec{B}_r$). Welke symmetrie-eigenschappen heeft deze stroomverdeling? Toon aan dat hieruit volgt dat het veld ($\vec{B}_r$) overal in de ruimte in de x-richting is.

Bereken $\vec{B}_r$ overal in de ruimte.

b) Gebruik nu superpositie om het totale $\vec{B}$-veld t.g.v. beide stroomverdelingen overal in de ruimte te bepalen.

c) Hoe groot is de kracht per eenheid van oppervlakte die de beide stroomverdelingen op elkaar uitoefenen?

d) Een deeltje met massa m en positieve lading q wordt naast de plaat, op afstand d van het rechter buitenoppervlak in de richting van de stroomrichting weggeschoten. Welke baan gaat het deeltje doorlopen?

Hoe groot mag de snelheid v maximaal worden gekozen opdat het deeltje de plaat net niet raakt?

e) Geef aan hoe de antwoorden bij de onderdelen b), c) en d) veranderen wanneer de magnetische susceptibiliteit χ_m van het plaatmateriaal niet verwaarloosbaar klein is.

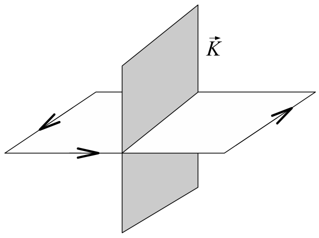
Antwoorden:

Zie ook opgaves 5.8 en 5.16 uit Griff.

a) Het xy-vlak is een anti-symmetrievlak voor de stroomverdeling, dus $\vec{B}$ zal in dat vlak liggen. Het yz-vlak is symmetrievlak $\Rightarrow B \perp yz$-vlak.

Dus $\vec{B}$ ligt langs de x-as.

Ampèreloop in het xy-vlak:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{end}} \quad \Rightarrow \quad B \cdot 2l = \mu_0 K l$$

rechts $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2} K\hat{x}$, links $\vec{B} = +\frac{\mu_0}{2} K\hat{x}$

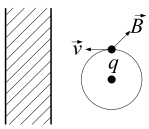
b)

	l		r	
B_r $\odot$		B_r $\odot$		B_r $\otimes$
$\odot$ B_l		$\otimes$ B_l		$\otimes$ B_l

links van de plaat $\vec{B} = +\mu_0 K\hat{x}$
rechts van de plaat $\vec{B} = -\mu_0 K\hat{x}$
binnen de plaat $\vec{B} = 0$

c)

$$\begin{aligned} F_{magn} &= \pm \int d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{K} \times \vec{B}_l da \text{ (links op rechts)} \\ &= (K\hat{z}) \times \left(-\frac{\mu_0}{2} K\hat{x}\right) \cdot A \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{A} = -\frac{\mu_0 K^2}{2}\hat{y} \end{aligned}$$

d) 

cirkelbaan $\vec{v} \perp \vec{B}, \vec{F}_L \perp \vec{v}, \vec{B}$

$\vec{F}_L = qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \frac{qRB}{m}$

voor $2R < d \qquad v < \frac{qd\mu_0 K}{2m}$

e) $\vec{B}$ velden blijven gelijk, want binnen blijft 0. $\vec{F}$ wordt sterker; μ_0 wordt $\mu_r\mu_0$. v blijft gelijk buiten de plaat.

N.B. Bij dit tentamen zat een formuleblad met vectorafgeleides, dat ter inzage bij de TBC ligt.