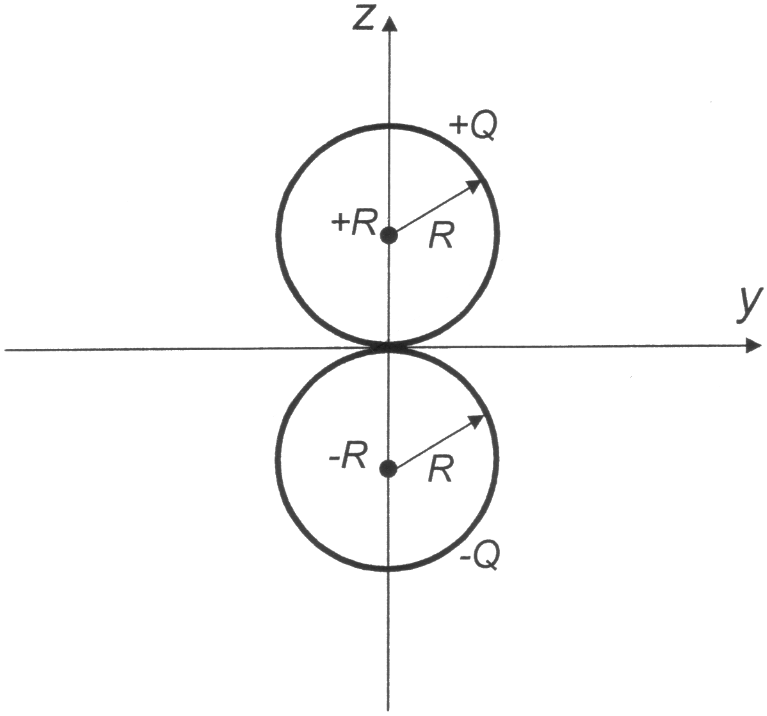
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A−Eskwadraat.
Het college NS-251b werd in 2006/2007 gegeven door Dr. P.A. Zeijlmans van Emmichoven.

Elektrodynamica (NS-251b)
20 april 2007

Opgave 1

Twee zeer dunne bolschillen met straal R zijn gemaakt van isolerend materiaal en staan opgesteld in vacuüm (afstand tussen middelpunten is $2R$). Zoals aangegeven in onderstaande dwarsdoorsnede kiezen we de z-as door de middelpunten van de bolschillen en de oorsprong precies tussen beide bolschillen in. De x-as staat loodrecht op het vlak van tekening en gaat door de oorsprong. Op de bovenste bolschil bevindt zich een uniforme positieve ladingsverdeling (totale lading $+Q$), op de onderste bolschil een uniforme negatieve ladingsverdeling (totale lading $-Q$).



a) Welke symmetrie-eigenschappen heeft de ladingsverdeling? Geef aan wat het gevolg is voor het elektrische veld $\vec{E}$ op de z-as en wat voor het $\vec{E}$ veld in hetvlak $z = 0$. *(7 punten)*

b) Bereken het $\vec{E}$-veld op de z-as voor $z > 2R$. Geef ook aan hoe het veld benaderd kan worden voor $z \gg 2R$. *(7 punten)*

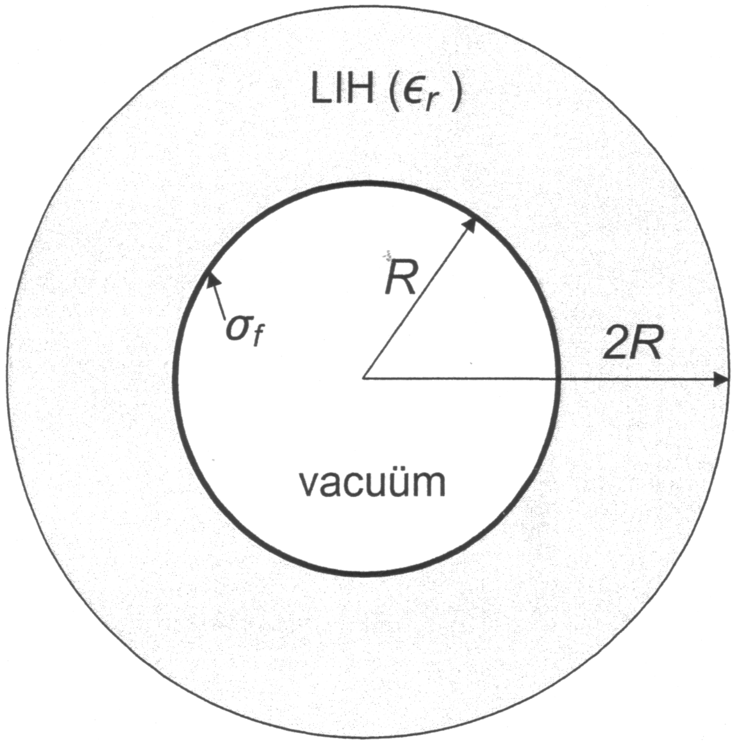
c) Bereken het $\vec{E}$-veld in het vlak $z = 0$. Geef aan hoe het veld benaderd kan worden voor $y \gg R$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. *(7 punten)*

d) Hoe groot is het dipoolmoment van de ladingsverdeling? Laat zien dat de benaderde antwoorden bij b) en bij c) overeenstemmen met het veld van deze dipool. *(7 punten)* De negatief geladen bolschil wordt nu weggehaald en vervangen door een oneindig grote, geaarde metalen plaat in het $z = 0$ vlak. Bereken opnieuw het $\vec{E}$ veld op de z-as voor $z > 2R$ en in het vlak $z = 0$. Hoe groot is het $\vec{E}$-veld voor $z < 0$?

Gegeven, binomiaalontwikkeling: $(1 + \epsilon)^p = 1 + p\epsilon + \dfrac{p(p-1)}{2!}\epsilon^2 + \ldots$.

Opgave 2

Een oneindig lange cilinder is hol van binnen ($O \leq r < R$) en bestaat uit LIH diëlektricum met relatieve permittiviteit ϵ_r, aan de buitenzijde ($R \leq r < 2R$). r geeft de afstand tot de centrale as van de cilinder aan. Een dwarsdoorsnede van de cilinder is weergegeven in onderstaande figuur. Op de binnenzijde van het diëlektricum ($r = R$) bevindt zich een uniforme, positieve, vrije oppervlakteladingsdichtheid σ_f. Buiten de cilinder heerst vacuüm.



a) Bereken het $\vec{D}$-veld naar richting en grootte overal in de ruimte. *(9 punten)*

b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ overal in de ruimte. *(6 punten)*

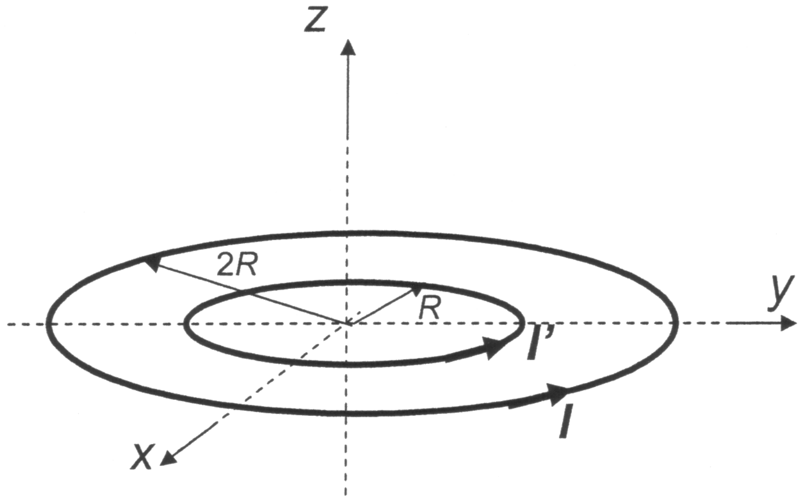
c) Bereken de polarisatievector $\vec{P}$ in het LIH diëlektricum. *(6 punten)*

d) Hoe groot zijn de gebonden ladingsdichtheden ρ_b en σ_b? Geef duidelijk aan waar de gebonden ladingen zich bevinden. *(7 punten)*

e) Schets de grootte van $\vec{D}$ en van $\vec{E}$ als functie van r. Geef aan waar de sprongen in de velden zitten en bereken deze. *(7 punten)*

Opgave 3

Twee stroomvoerende ringen, de een met straal R, de ander met straal $2R$ zijn concentrisch opgesteld in het vacuüm. De buitenring voert een stroom I, de binnenring een stroom I' (zie figuur). De magnetische eigenschappen van het materiaal waar de ringen van gemaakt zijn mogen worden verwaarloosd. We kiezen het middelpunt van de ringen als oorsprong, het vlak waar de ringen in liggen als xy-vlak en de as door de oorsprong loodrecht op de ringen als z-as.



a) Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ van deze stroomverdeling. *(5 punten)*

b) Bereken het $\vec{B}$-veld overal op de z-as naar richting en grootte. *(10 punten)*

c) Welke stroom I' moet ei door de binnenring worden gestuurd (u itgedrukt in I), zodat het $\vec{B}$ veld op grote afstand geen dipoolterm bevat? Wat is dan het karakter van het veld op grote afstand? *(5 punten)*

d) Wanneer er door de binnenring een stroom $I' = I$ (dus naar richting en grootte gelijk aan stroom door buitenring) wordt gestuurd, oefent de buitenring dan een netto kracht uit op de binnenring? En een koppel? *(5 punten)*

e) Zelfde vragen als bij d), maar nu wanneer de binnenring een kwartslag is gedraaid en in het xz-vlak ligt. *(5 punten)*

Vectorafgeleides

Cartesian. $d\,\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

$$
\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Spherical. $d\,\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$
\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} \\
& & & + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} \\
\textit{Laplacian}: \quad & \nabla^2 t &=& \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

Cylindrical. $d\,\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

$$
\begin{aligned}
\textit{Gradient}: \quad & \nabla t &=& \frac{\partial t}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Divergence}: \quad & \nabla \cdot \mathbf{v} &=& \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}(s\,v_s) + \frac{1}{s}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\textit{Curl}: \quad & \nabla \times \mathbf{v} &=& \left[\frac{1}{s}\,\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}} \\
\textit{Laplacian}: \quad & \nabla^2 t &=& \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$