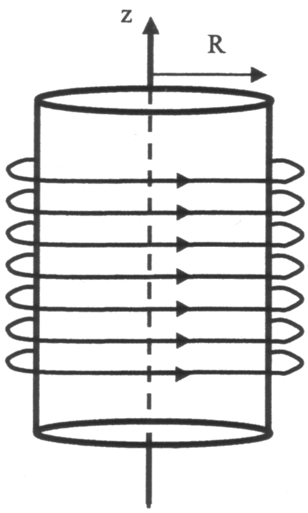
Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college NS-251b werd in 2005/2006 gegeven door drs. J. van Dijk.

Elektrodynamica 2 (NS-251b)
5 juli 2006

Opgave 1 *(35 punten)*

Een oneindig lange cilinder met straal R bestaat uit paramagnetisch materiaal met susceptibiliteit χ_m. Om de cilinder is zeer nauw een spoel gewonden met hoge windingsdichtheid n. Een stukje van de spoel is weergegeven in de figuur (de spoel is veel nauwer en dichter om de cilinder gewonden dan getekend). De spoel voert een stroom I in de richting zoals aangegeven in de figuur. De z-as wordt gekozen langs de centrale as van de cilinder. U mag er in deze opgave vanuit gaan dat het paramagnetische materiaal zich lineair gedraagt.



a) Gebruik symmetrie (en zonodig de rechterhandregel) om de richting van het $vecH$ veld overal in de ruimte te bepalen. Bereken tevens de grootte van het $\vec{H}$ veld zowel binnen de spoel als daarbuiten. *(7 punten)*

b) Bereken het $\vec{B}$ veld zowel binnenin de spoel als daarbuiten. Hoe groot is de bijdrage aan het $\vec{B}$ veld van de paramagnetische cilinder? *(7 punten)*

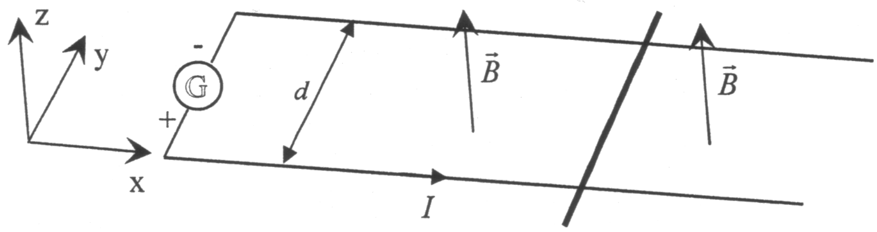
c) Bereken de magnetisatie $\vec{M}$ van de paramagnetische cilinder en hieruit de equivalente gebonden stroomdichtheidsvectoren $\vec{J}_b$ en $\vec{K}_b$. *(7 punten)*

d) Teken de grootte van het $\vec{H}$ veld, van $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ en van $\vec{M}$ in één figuur als functie van de afstand r tot de z-as. *(7 punten)*

e) Bereken het magnetisch dipoolmoment $\vec{m}$ per eenheid van lengte van de cilinder mét spoel. *(7 punten)*

Opgave 2 *(35 punten)*

Een metalen draad, massa m, glijdt zonder frictie over twee evenwijdige geleidende rails met een afstand d. Rails en draad zijn ideale geleiders zonder weerstand. Een extern homogeen en constant $\vec{B}$ veld ($\vec{B} = B_0\hat{z}$ staat loodrecht op het vlak van de rails (xy-vlak), zie tekening.



a) De rails zijn verbonden met een voeding, $\mathbb{G}$, wat er voor zorgt dat er een constante stroom I_0 loopt door de rails via de draad. Bepaal de snelheid $\vec{v}(t)$ (richting en grootte) van de draad als functie van de tijd. Neem aan dat $\vec{v}(t=0)=0$. Verwaarloos in dit onderdeel het $\vec{B}$ veld ten gevolge van de stroom.

Opgave 3

(30 punten)

Het elektrische veld van een eenvoudig sferische golf (in vacuüm) kan in bolcoördinaten (r,θ,ϕ) uitgedrukt worden als

$$\vec{E}(r,\theta,\phi,t) = E_0\frac{\sin\theta}{r}\left[\cos u - \frac{1}{kr}\sin u\right]\vec{\phi}$$

met $u \equiv kr - \omega t$.

a) Laat door berekening zien, dat deze golf aan de wet van Gauss voldoet

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right]$$

(5 punten)

b) Laat door berekening zien, dat deze golf ook een oplossing van de golfvergelijking $\left[\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right]$ voor het $\vec{E}$ veld is. U mag aannemen dat de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden aan de Maxwellvergelijkingen voldoen. *(5 punten)*

c) Laat door berekening zien dat het $\vec{B}$ veld geschreven kan worden als

$$\vec{B} = \frac{2E_0\cos\theta}{\omega r^2}\left(\sin u + \frac{1}{kr}\cos u\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{E_0\sin\theta}{\omega r}\left(-k\cos u + \frac{1}{kr^2}\cos u + \frac{1}{r}\sin u\right)\vec{\theta}$$

met $u = kr - \omega t$ *(7.5 punten)*

d) Bepaal de intensiteitvector, $\vec{I}$, die gedefinieerd is als het tijdsgemiddelde over een periode van de Poyntingvector $\left(\vec{I}\equiv\langle\vec{S}\rangle\right)$, en beargumenteer waarom de r-afhankelijkheid van de intensiteitvector "als verwacht" is.

Hint: $\langle\sin u\cos u\rangle = 0$, en $\langle\sin^2 u\rangle = \langle\cos^2 u\rangle = \frac{1}{2}$. *(7.5 punten)*

e) Bereken het totaal uitgestraalde vermogen voor deze sferische golf.

Hint: $\displaystyle\int \sin^3 ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a}$.

Vectorafgeleides

Cartesian. $d\,\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: & \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Divergence}: & \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\textit{Curl}: & \nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

Spherical. $d\,\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\phi}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: & \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial r}\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} \\
&\textit{Divergence}: & \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
&\textit{Curl}: & \nabla \times \mathbf{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} \\
& & &\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} \\
&\textit{Laplacian}: & \nabla^2 t &= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

Cylindrical. $d\,\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

$$
\begin{aligned}
&\textit{Gradient}: & \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial s}\,\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\,\frac{\partial t}{\partial \phi}\,\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\,\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Divergence}: & \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}(s\,v_s) + \frac{1}{s}\,\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\textit{Curl}: & \nabla \times \mathbf{v} &= \left[\frac{1}{s}\,\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}} \\
&\textit{Laplacian}: & \nabla^2 t &= \frac{1}{s}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\,\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$