Tentamen modellen en simulatie 19 april 2006

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Arthur van Dam of Arno Swart).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Een schoenmaakster vervaardigt schoenen (op maat) van zulke kwaliteit dat zij zich om de verkoop geen zorgen hoeft te maken, in tegendeel, zij kan zelf haar klanten kiezen. Enigszins beperkt wordt zij door de $45\,m^2$ (kwaliteits)leer die zij jaarlijks geleverd krijgt, en bovendien wil zij niet meer dan 8 uur per dag werken. Een computergestuurde speciaalmachine die zij tot haar beschikking heeft kan zij 10 uur per dag laten lopen. Voor deze opgave rekenen we het jaar met 200 werkdagen.

   Om een damesschoen te maken is zij 4 uur bezig en heeft daar bovenop nog 4 uur machinetijd nodig. Hieraan verbruikt zij $0.06\,m^2$ leer en haar (netto)winst is 75. Voor een herenschoen is zij 2 uur bezig met bovenop 5 uur machinetijd, verbruikt zij $0.15\,m^2$ leer en maakt 150 winst.

   (*i*) Stel de ongelijkheden op die de productie van de schoenmaakster beperken. Geef ook de doelfunctie die de winst beschrijft.

   (*ii*) De schoenmaakster staat hier voor een optimaliseringsprobleem. Hoeveel van elk soort moet zij gemiddeld per jaar verkopen als zij haar winst wil maximaliseren? (Als zij een schoen niet af krijgt, gaat ze er de volgende dag mee verder.)

2. Gegeven het parameterafhankelijke systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y^3 \\ \dot{y} &= xy + y \end{aligned}$$

   van differentiaalvergelijkingen, waarbij $\alpha > 0$.

   (*i*) Bepaal de evenwichtspunten van dit systeem.

   (*ii*) Geef de Jacobimatrix van dit systeem.

   (*iii*) Bepaal voor ieder evenwichtspunt de stabiliteitstype(s), afhankelijk van de waarde van α.

   (*iv*) Als we $\alpha < 0$ nemen, wat is het stabiliteitstype van de twee evenwichstpunten dan?

(z.o.z.)

3. In deze opgave bestuderen we een populatie schapen, deze worden elk jaar rond kerst geboren. Van de lammetjes overleeft $\frac{5}{6}$ de eerste 2 jaar, waarna ze zelf beginnen lammetjes te werpen, eerst gemiddeld $\frac{3}{5}$ en in het volgende jaar (als ze dus zelf drie jaar zijn) gemiddeld 1. Alle tweejarige schapen worden ook drie jaar oud. De herder zorgt ervoor dat geen enkel schaap vier jaar oud wordt, en hij bepaalt eveneens de parameter $p \in \,]0,1[\,$ — de fractie van gezondgeboren lammetjes die nog voor pasen naar de slachtbank worden afgevoerd. (Deze fractie p is in bovenstaande $\frac{5}{6}$ nog niet verwerkt, en we gaan voor het gemak ervan uit dat de slachtbank tussen kerst en pasen de enige doodsoorzaak is.)

   (i) Stel een model op. Laat hiervoor $s(n) \in \mathbb{R}^4$ het aantal schapen in jaar n zijn, gesorteerd op leeftijd, en stel de 4×4 matrix L op die de dynamica

$$s(n+1) \quad = \quad L \cdot s(n)$$

   bepaalt. Hoe bepaal je gegeven de overgangsmatrix L in het algemeen de overgang van staat i naar staat j over n jaar?

   (ii) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is L aperiodiek? Heeft L een dominante eigenwaarde?

   (iii) Stel de eigenwaardevergelijking op voor L.

   (iv) Bereken de waarde van p waarvoor 1 een eigenwaarde is van L en laat zien dat 1 dan de dominante eigenwaarde is. *Hint: laat zien dat voor de tweede reële oplossing λ van de eigenwaardevergelijking $-1 < \lambda < 0$ is. Waarom moeten de complex geconjugeerde eigenwaarden dan eveneens in absolute waarde echt kleiner dan* 1 *zijn?*

   (v) Als $p = \frac{1}{4}$ en $s(0) = (600, 300, 250, 50)$, wat is dan de limiet $\lim\limits_{n\to\infty} L^n \cdot s(0)$?

4. Beschouw de functie $f : [0, 2\pi[\longrightarrow [0, 2\pi[$ gegeven door

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 2x & x \in [0,\pi[\\ & \text{als} \\ 2(x-\pi) & x \in [\pi, 2\pi[\end{cases} .$$

   (i) Laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

   (ii) Ga na dat in elke omgeving $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \ldots$ periodiek is. *Hint: hoe ziet de grafiek van f^n eruit, i.h.b. voor hoge waarden van n ?*

   (iii) Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden.