Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB134 werd in 2002/2003 gegeven door Wilberd van der Kallen.

Modellen en Simulatie (WISB134)
1 juli 2003

- Zet je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Geef nooit alleen antwoorden, maar geef aan hoe je eraan komt.

Opgave 1

In deze opgave bestuderen we de jaarlijkse populaties konijnen en vossen in een bepaald natuurgebied. Zij x_n resp. y_n het aantal konijnen resp. vossen bij aanvang van het n-de jaar. Omdat de vossen op konijnen jagen, heeft de aanwezigheid van vossen een remmende invloed op de konijnenpopulatiegroei, terwijl omgekeerd de aanwezigheid van konijnen juist een stimulerende invloed heeft op de vossenpopulatiegroei. We modelleren de (geschaalde) populatiegrootten met behulp van de volgende recursie, waarbij a en b vaste parameters zijn die voldoen aan $a \geq b \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + a - x_n - y_n)\, x_n; \\ y_{n+1} &= (1 + b - y_n + x_n)\, y_n. \end{aligned}$$

1. Bepaal de evenwichtspunten van deze recursie.

Veronderstel nu in het vervolg dat $b = 0$.

2. Bereken de Jacobiaan (Jacobi-matrix) in het evenwichtspunt $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$.
3. Bepaal de eigenwaarden λ_1, λ_2 van de Jacobiaan in het vorige onderdeel.
4. Bewijs dat $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \frac{1}{2}a(a-2) + 1$.
5. Bepaal de waarden van $a \geq 0$ waarvoor het evenwichtspunt $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ stabiel is.

Opgave 2

Het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x - y), \qquad x \geq 0 \\ \frac{dy}{dt} &= y(2 - x - 3y), \qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

is een speciaal geval van de Volterra-Lotka vergelijkingen die de competitie tussen twee biologische populaties beschrijven.

1. Maak een grafische analyse. Dus teken als op pagina 61-62 de lijnen waar het vektorveld vertikaal respectievelijk horizontaal loopt, en geef de windrichting aan van het pijltjes-patroon. Markeer de evenwichtspunten met een dikke stip en zet bij de stabiele een s, bij de instabiele een i.
2. Bepaal ook analytisch, via de Jacobi-matrix, de aard van elk van de evenwichtspunten.
3. Vat je bevindingen samen in biologische termen.

Opgave 3

Beschouw de aangedreven ongedempte harmonische oscillator

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin \nu t \qquad \nu > 0$$

1. Geef de algemene (reëelwaardige) oplossing van de homogene vergelijking.
2. Geef een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking.
3. Er is een aandrijffrequentie ν waarvoor er *geen* begrensde oplossing is. Welke hoekfrequentie ν is dat? Geef dit verschijnsel een naam en licht het toe. We vragen nu geen expliciete oplossing voor deze speciale frequentie, maar met `Mathematica` is er wel een formule voor te vinden.

Opgave 4

We gooien keer op keer een zuivere dobbelsteen. Laat $x_i(n)$ de kans zijn dat in n keer gooien de hoogste uitkomst i is, waarbij $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

1. Geef de 6×6 overgangsmatrix P zo dat
$$x(n+1) = Px(n).$$
2. Maak een graaf met als knopen zes toestanden (de i-de toestand is "Hoogste uitkomst is i") en pijlen voor overgangen met positieve kans.
3. Aan de graaf zien we dat "Hoogste uitkomst is 6" een absorberende toestand is. Wat denk je dat we daarmee bedoelen en hoe wordt dit weerspiegeld in een eigenvector bij eigenwaarde 1 van P?

Hoe vaak moeten we naar verwachting gooien voordat we een zes gooien? Om het antwoord te bepalen gooien we "Hoogste uitkomst is 1,2,3,4 of 5" op een grote hoop en werken met een 2×2 overgangsmatrix.

1. Stel die 2×2 matrix op en leg uit hoe hij ontstaat.
2. Bereken het verwachte aantal gooien dat nodig is totdat er een zes valt. (Zoals altijd geven we weinig om alleen het antwoord. Het gaat om de afleiding.)