Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Maandag, 1 juli 2013, 9:00-12:00, Educatorium Gamma Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

Opgave 1. We bekijken in deze opgave een variant van het rups-sluipwespen model in §3.1 van het dictaat. Deze variant is gebaseerd op het Hassel-Lawton-May model.

Door handig te schalen kan de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie gemodelleerd worden door

$$\begin{cases} r_{n+1} = \kappa^3 \dfrac{r_n}{(1 + r_n + w_n)^3}, \\ w_{n+1} = b\, r_n\, w_n, \end{cases} \tag{1}$$

met r_n het aantal rupsen (op zekere schaal) en w_n aantal wespen (ook op zekere geschikte schaal), b en κ zijn zekere positieve constanten.

a) Bepaal voor alle $\kappa > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van κ en b af? Zo ja, hoe?

Uit a) blijkt dat $(1/b, \kappa - 1/b - 1)$ een evenwicht is. Neem verder $\kappa = 3$ en bekijk alleen $b \geq 1/2$, de waarden voor b waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

b) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan $\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda + 3 - 2/b = 0$.

c) Bepaal voor welke waarden van b dit evenwicht stabiel is.
(*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van b, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reëel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

d) Voor welke waarden van b spiralizeert de oplossing in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht toe?

Opgave 2. In een fietsfabriek worden racefietsen en mountainbikes gemaakt. De netto winst per racefiets is €225 en de netto winst per mountainbike is €300. Met de beschikbare arbeidskracht kunnen maximaal 800 fietsen per week gemaakt worden en beide types kosten evenveel werk. Met een bepaalde boormachine kan 40 uur per week gewerkt worden. Voor de vervaardiging van een racefiets is de boormachine $\frac{1}{25}^{ste}$ uur nodig en voor een mountainbike tweemaal zo lang. Van een bepaald soort buis zijn 8 eenheden nodig voor een racefiets en 12 eenheden voor een mountainbike. De toelevering vanuit de aluminiumfabriek is maximaal 9400 eenheden per week.

a) Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem.

b) Breng het probleem op standaard vorm.

c) Gebruik de simplexmethode om uit te rekenen hoevel racefietsen en hoeveel mountainbikes de fabriek per week moet produceren om een zo groot mogelijke winst te maken. Controleer je antwoord grafisch.

d) Hoe groot is die winst dan? Geef een interpretatie voor de slackvariabelen.

Opgave 3. In een analyse van een variant van het Verhuls model waarin een ruimtelijke term (een emigratie term) is opgenomen duikt de volgende differentiaalvergelijking op

$$c\,u' = (a-u)u - bu''.$$

Hierin zijn a, b en c (bekende) positieve constanten en is u een (onbekende) functie van één verandelijke. We nemen $b = c = 1$, $a > 0$.

a) Laat zien dat met $x \equiv u$ en $y \equiv u'$ geldt

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (a-x)x - y \end{cases}$$

Geef in het (x, y)-vlak aan waar $x' = 0$, respectievelijk, $y' = 0$. Bepaal de evenwichten.

b) Geef een indicatie van het richtingsveld. Uit het richtingsveld kan je de aard van het evenwicht $(0,0)$ vaststellen. Waarom en wat is de aard van dat evenwicht? Lukt dat ook voor het andere evenwicht? (Motiveer)

c) Bepaal de aard van het andere evenwicht door lineairisatie. Hoe hangt dat van a af?

d) Schets het fase portret voor twee karakteristieke waarden van a (twee plaatjes). Schets voor een van die waarde van a de grafiek van u met $u(0) \approx 0, u(0) > 0$.

Opgave 4. We bekijken een eenvoudig internetnetwerk (WWW) van vijf pagina's. Pagina 1 bevat een link naar de pagina's 2, 4 en 5, pagina 2 linkt naar 3, 3 linkt naar 2, 4 linkt naar 3 en 5 en pagina 5 linkt naar 2. Verder bevatten de pagina's geen links. Dit netwerk kan gevisualiseerd worden als een gerichte graaf. Google ziet deze graaf als graaf van een kansmatrix, zeg $\widetilde{\mathbf{P}}$, waarbij ze in iedere kolom van de matrix de niet-nul coëfficiënten dezelfde waarde geven (de waarde is kolom afhankelijk).

a) Geef deze graaf en stel de matrix $\widetilde{\mathbf{P}}$ op.
Als het niet lukt om de matrix op te stellen mag je de volgende matrix gebruiken:

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Is de stelling van Perron-Frobenius toepasbaar op deze matrix?

Google kiest een $\alpha \in (0,1)$ en modificeert deze matrix tot $\mathbf{P} \equiv (1-\alpha)\widetilde{\mathbf{P}} + \alpha\frac{1}{5}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$. Hierbij is $\mathbf{1}$ de (kolom) vector in $\mathbb{R}^5$ waarvan alle coördinaten gelijk zijn aan 1. Hiermee is $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ de 5×5 matrix waarvan alle coëfficiënten gelijk aan 1 zijn.

c) Laat (zonder expliciet te rekenen) zien dat $\mathbf{P}$ een dominante eigenvector heeft, zeg $\mathbf{v}_1$. Welke waarde heeft de bijbehorende eigenwaarde λ_1?

d) Als $\mathbf{v}_j$ een eigenvector van $\mathbf{P}$ bij een andere eigenwaarde λ_j, dus $\lambda_j \neq \lambda_1$, dan is $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_j = 0$. Waarom? (*Hint: bedenk dat* $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = \mathbf{1}^T$.) Concludeer dat $\mathbf{v}_j$ ook een eigenvector is van $\widetilde{\mathbf{P}}$ en toon aan dat $|\lambda_j| \leq 1-\alpha$.

Bij 'pageranking' stelt Google het 'belang' van pagina k gelijk aan de waarde van de k-de coördinaat van $\mathbf{v}_1$, waarbij $\mathbf{v}_1$ zo geschaald is dat alle coördinaten optellen tot 1: $\mathbf{1}^T\mathbf{v}_1 = 1$.

e) Verklaar waarom $(\mathbf{x}_n)$, met $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{5}\mathbf{1}$ en $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_n$ alle n, naar $\mathbf{v}_1$ convergeert.