Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Woensdag, 27 juni 2012, 13:30-16:30, Educatorium, Beta Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

Opgave 1. We hebben recentelijk kunnen lezen dat de haringstand in de Noordzee weer op peil is. Er waren alleen wat zorgen over het aantal jonge haringen. Een verklaring werd gezocht in het feit dat haringen haringlarven eten als die onvoldoende schuilplekken kunnen vinden.

Zij x_n het aantal haringlarven en y_n het aantal haringen in jaar n (gemeten op het eind van de lente). We beschouwen het volgende model

$$\begin{cases} x_{n+1} = ay_n, \\ y_{n+1} = by_n + cx_n - dx_ny_n. \end{cases}$$

Hierin zijn a, b, c, d bekende positieve constanten. Verder is $b < 1$.

a) Interpreteer de termen by_n en $-dx_ny_n$.

2 Oplossing. De term by_n modelleert het aantal haringen in jaar n dat in het daaropvolgend jaar nog in leven is. Dit deel is evenredig met y_n en minder dan y_n, b is de evenredigheidsconstant en $b \in [0, 1)$.
$(c - dy_n)x_n$ is het deel van de larven in jaar n dat in jaar $n + 1$ uitgroeit tot haring. Dit deel is evenredig met x_n met 'evenredigheidsconstante' $c - dy_n$. Deze 'constante' neemt lineair af bij groeiend aantal haringen: $-dy_nx_n$ modelleert de vraat van larven door volwassen haringen. Deze term is evenredig met het het aantal larven (naarmate er meer larven zijn zijn ze gemakkelijker te vinden) en met het aantal haringen (nraamate er meer haringen zijn worden er meer larven gegeten). De beschikbaarheid van de schuilplekken zit in de constante d.

Laat door herschalen zien dat we $a = 1$ en $d = 1$ mogen veronderstellen.

1 Oplossing. Kies $x'_n \equiv ax_n$. Dan $x'_{n+1} = y_n$ en $y_{n+1} = by_n + cax'_n - dax'_ny_n$. Verder is $dax'_{n+1} = day_n$ en $day_{n+1} = b(day_n) + ca(dax'_n) - (dax'_n)(day_n)$.

We veronderstellen verder dat $a = 1$ en $d = 1$.

b) Bereken de evenwichtsoplossingen.

2 Oplossing. Stel $x_n = \alpha$ en $y_n = \beta$ voor alle n. Dan $\alpha = x_{n+1} = y_n = \beta$ en $\beta = b\beta + c\alpha - \alpha\beta = (b + c - \beta)\beta$. Dus I) $\alpha = \beta = 0$ of II) $\alpha = \beta = b + c - 1$. Dit tweede evenwicht is alleen biologisch relevant als $b + c \geq 1$.

c) Bepaal de Jacobi matrix van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die de recursie beschrijft.

2 Oplossing. Jacobi matrix in (α, β): $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c - \beta & b - \alpha \end{bmatrix}$. Dus $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & b \end{bmatrix}$ in geval I en $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - b & 1 - c \end{bmatrix}$ in geval II

d) Bepaal de stabiliteit van de evenwichten (hoe hangt dat af van b en c?).

3 Oplossing. De eigenwaarden λ_i in evenwicht $(0,0)$ (geval I) voldoen aan $\phi(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - b) = c$. Stabiel als $1 > b + c$. Hierbij hebben we gebruikt dat $c \geq 0$ en dus heeft de vergelijking twee reële wortels λ_1 en λ_2 die tussen -1 en $+1$ liggen als $\phi(+1) > c$ en $\phi(-1) > c$. Omdat $\phi(-1) = 1 + b$ en $b \geq 0$ impliceert $\phi(1) = 1 - b > c$ dat $\phi(-1) > c$.
De eigenwaarden λ_i in $(b+c-1, b+c-1)$ (geval II) voldoen aan $\phi(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - 1 + c) = 1 - b$. Stabiel als $b + c > 1 > c - b$. Hierbij hebben we gebruikt dat $1 - b \geq 0$ en dus heeft de vergelijking twee reële wortels λ_1 en λ_2 die tussen -1 en $+1$ liggen als $\phi(+1) > 1 - b$ en $\phi(-1) > 1 - b$.

Opgave 2. Een onderneming exploiteert een aantal kampeerterreinen. Men overweegt de inrichting van een nieuw terrein dat een oppervlakte moet krijgen van maximaal 100 ha. Op het terrein zullen aparte afdelingen voor tenten, caravans en kampeerauto's worden gerealiseerd. Uit de beschikbare exploitatiegegevens kan men afleiden dat de gemiddelde opbrengst per maand, per hectare voor tenten, caravans resp. kampeerauto's op respectievelijk €4000,-, €3000,- en €5000,- gesteld kan worden. Uit marktonderzoek heeft men afgeleid dat:

- Tenminste 30 ha van het terrein voor tenten bestemd moet worden.
- De ruimte voor caravans en kampeerauto's samen kleiner moet zijn dan de ruimte voor tenten.
- Niet meer dan 10 ha voor kampeerauto's mag worden ingericht.

Men wenst, gegeven deze informatie, te bepalen welke oppervlakten voor de drie deelterreinen gekozen moet worden opdat de totale opbrengst van het terrein gemaximaliseerd wordt.

a) Formuleer dit vraagstuk als lineaire programmeringsprobleem.

3 Oplossing. Zij t de oppervlakte voor tenten (in ha), c voor caravans en Te maximaliseren $4t + 3c + 5k$ (de opbrengst over 100 ha in duizend Euro) waarbij $t + c + k \leq 100$, $t \geq 30$, $c + k \leq t$ en $k \leq 10$. Met slack variabelen wordt dat

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -30 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & M
\end{array}$$

b) Los het probleem op.

7 Oplossing. Veeg met pivot $(1,1)$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 70 \\
0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
0 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & M - 400
\end{array}$$

Dan is $(100, 0, 0, 0, 70, 100, 10)^T$ een (acceptabel) hoekpunt (2 punten). Langs de 3-de kolom is verbetering mogelijk. $[110/1, 70/1, 100/2, 10/1]$ is minimaal voor $i = 4$ (3 punten).

Veeg met pivot $(4,3)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr|r}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 90 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 60 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 80 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\
\hline
0 & -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & M - 410
\end{array}$$

Er is geen verbetering meer mogelijk (alle coëfficiënten doelfunctie ≤ 0) (2 punten). We hebben de oplossing gevonden: $(90, 0, 10, 0, 60, 80, 0)^T$. Dus $t = 90$, $c = 0$ en $k = 10$ en $M =$ €$\,410\,000$.

Opgave 3. In een zeker gebied is $x(t)$ de gemiddelde hoeveelheid brandnetel op tijdstip t en $y(t)$ de gemiddelde hoeveelheid giftige stof in de bodem die door de brandnetels zelf geproduceerd is. De groei van de brandnetels wordt geremd door zijn eigen gif. In de grond wordt het gif met constante snelheid afgebroken. Er geldt

$$\begin{cases} x' = 2x - xy \\ y' = x - K(y) \end{cases} \qquad \text{waarbij} \qquad K(y) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad y > 0 \\ 0 & \text{als} \quad y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Laat zien dat (afgezien van constanten die we hier voor het verdere rekengemak genormeerd hebben) dit een redelijk model is voor de beschreven situatie. Geef een interpretatie voor de functie K.

2 Oplossing. $(2-y)x$ geeft weer dat de toename in de hoeveelheid brandnetel evenredig is met de hoeveelheid brandnetel, met evenreidgheidsfactor $2-y$. Hierin wordt de groeifactor 2 verkleind door de hoeveelheid gif (de $-y$ term).
De term x in de uitdrukking voor y' geeft aan dat de toename in de hoeveelheid gif evenredig is met de hoeveelheid brandnetel. De term -1 geeft weer dat de afbraak van het gif in de grond met constante snelheid gebeurd (onafhankelijk van de hoeveelheid gif). De afbraak is uiteraard 0 als er geen gif in de grond zit: dit verklaard waarom K een ''sprong'' maakt van $y=0$ (geen gif) naar $y>0$ (wel gif).

b) Bepaal de evenwichtspunten van (1).

3 Oplossing. Evenwicht als $x'=0$ en $y'=0$.
Stel $y \neq 0$. $x'=0$: $x=0$ of $y=2$. $y'=0$: $x=1$. Een evenwicht in $(1,2)$.
Stel $y=0$. Dan evenwicht in $(0,0)$.
De Jacobi matrix in (x,y) met $y \neq 0$ is $\begin{bmatrix} 2-y & -x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dus in $(1,2)$ is dat $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Op grond van deze matrix zou je zeggen dat het evenwicht een centrumpunt is (met eigenwaarden $\pm i$). Omdat kwadratische termen verwaarloosd zijn kan linearisatie hier geen eenduidig antwoord geven over de stabiliteit en de aard van het evenwicht.

Bepaal door linearisatie voor strikt positieve x en y waarden de aard van het evenwicht.

c) Bepaal een functie $F(x,y)$ waarvoor geldt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = y - 2$$

1 Oplossing. $F(x,y) = x - \ln(x) + \frac{1}{2}y^2 - 2y$

Laat zien dat voor voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) waarvoor $x(t) > 0$ en $y(t) > 0$ geldt dat $F(x(t), y(t)) =$ constant is.

1 Oplossing. Als (1) geldt, dan is
$x'(t)\frac{\partial F}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial F}{\partial y} = (2x-xy)(1-\frac{1}{x}) + (x-1)(y-2) = (2-y)(x-1) + (x-1)(y-2) = 0$.
Primitiveren laat zien dat $F(x(t),y(t)) = C$, immers $\frac{d\,F(x(t),y(t))}{d\,t} = x'(t)\frac{\partial F}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial F}{\partial y}$.

d) Zij $x_0 > 1$ zodat $x_0 - \ln(x_0) = 3$. Gebruik de functie F uit (c) om, in het relevante deel van het x-y–vlak, de kromme te schetsen van de oplossing van (1) met $x(0) = x_0$ en $y(0) = 2$. (Deze kromme is "ei-vormig" en (1,0) ligt erop).

1 Oplossing. Voor x_0 en $y_0 = 2$ is $F(x_0, y_0) = x_n - \ln x_0 + \frac{1}{2}y_0^2 - 2y_0 = 3 - 2 = 1$. Blijkbaar is de constante=1. Voor $x=1$ voldoet $y=0$ en $y=4$ aan $F(x,y)=1$. Schets niet bijgevoegd.

Geef aan in welke richting de oplossing de kromme doorloopt.

1 Oplossing. Voor $x=\epsilon$ en $y=\epsilon$ met $\epsilon>0$ en $\epsilon \approx 0$ is $x' \approx 2\epsilon > 0$ en $y' = \epsilon - 1 < 0$. Dus $x' > 0$ en $y' < 0$ op $(0,1) \times (0,2)$ en wordt de kromme in deze sector en dus overal (cntinuïteitsoverweging) tegen de klok in gevolgd.

e) Schets een oplossingskromme met $x(0) = x_1 > x_0$ en $y(0) = 2$. Ga na wat er gebeurt voor grote waarde van t. Geef een biologische interpretatie.

1 Oplossing. Aanvankelijk neemt de hoevelheid brannetel af en de hoeveelheid gif neemt toe. Tot tijdstip $t_1 > t_0 = 0$ als de hoeveelheid brandnetel 1 is ($x(t_1) = 1$). Dan neem zowel de heoveelheid brandnetel als de hoeveelheid gif af. Tot tijdstip $t_2 > t_1$ waarop de hoeveelheid gif 2 is ($y(t_2) = 2$). Dan groeit de hoeveelheid brandnetel en neemt de hoeveelheid gif af. Tot tijdstip $t_3 > t_2$ er geen gif is $y = 0$. Op dat tijdstip is $x(t_3) < 1$ en daarna (van t_3 tot t_4) groeit de hoeveelheid brandnetel tot 1 ($x(t_4) = 1$) met gifgehalte $y(t) = 0$ (het aangemaakte gif wordt onmiddellijk afgebroken in de bodem). Daarna volgt de oplossing de periodiek de kromme als vermeld in het vorige onderdeel.

Opgave 4. Van een gegeven rij $(f_1, \ldots, f_n)$ van reële getallen willen we uitrekenen voor welke waarde van de index i de waarde f_i minimaal is. Via het volgende iteratieve proces produceren we hiertoe een rij (i_k) van indices $i_k \in \{1, \ldots, n\}$. We kiezen eerst $T > 0$. In stap $k = 0$ kiezen we $i_0 = 1$.

Stel in stap k is index i_k gekozen. i_{k+1} wordt in twee sub-stappen als volgt gekozen.

i) Kies eerst $j \in \{i_k - 1, i_k + 1\}$ met kans $\frac{1}{2}$.

Vervang j door n als $j = 0$ en door 1 als $j = n + 1$ (d.w.z. $j \leftarrow j \bmod n$).

ii) Neem $i_{k+1} = j$ als $f_j \leq f_{i_k}$.

Neem $i_{k+1} = j$ met kans $\exp([f_{i_k} - f_j]/T)$ als $f_j > f_{i_k}$.

Neem $i_{k+1} = i_k$ als j niet genomen werd.

Bovenstaand proces kan beschreven worden als een Markov keten

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{p}_k.$$

Hierbij is de i-de coördinaat $\mathbf{p}_k(i)$ van $\mathbf{p}_k$ de kans dat $i_k = i$ en is $\mathbf{P}$ een matrix die afhangt van de gegeven rij van f_i-waarden.

Neem verder $n = 6$ en $(f_1, \ldots, f_6) = (3, 2, 1, 5, 4, 0)$. Dan

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 & 0 & 0 & * \\ \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-4/T} & * & \frac{1}{2}e^{-1/T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & * & \frac{1}{2}e^{-4/T} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & * \end{bmatrix}$$

a) Bepaal $\mathbf{p}_0$.

Oplossing. $\mathbf{p}_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

Geef voor $(i, j) = (1, 1)$ en voor $(i, j) = (1, 6)$ een uitdrukking voor $\mathbf{P}(i, j)$.

2 Oplossing. In een kansmatrix tellen de coëfficiënten in iedere kolom op tot 1. Dus is $\mathbf{P}(1, 1) = 1$.
Het element $\mathbf{P}(1, 6)$ geeft de kans dat de volgende index $i_{k+1} = 1$ wordt als de huidige index $i_k = 6$ is, dus $\frac{1}{2}\exp(-3/T)$: de $\frac{1}{2}$ komt van (i) (kans een $\frac{1}{2}$ dat $j = 1$ als $i_k = 6$). $3 = f_j = f_1 > 0 = f_6 = f_{i_k}$. Dus $i_{k+1} = j$ met kans $\exp([f_6 - f_1]/T) = \exp(-3/T)$.

b) Laat zien (zonder expliciet te rekenen) dat 1 de dominante eigenwaarde is van $\mathbf{P}$.

3 Oplossing. Alle coëfficiënten van $\mathbf{P}$ zijn ≥ 0. Verder is $\mathbf{P}$ irreducibel (er is een pad in de graaf van $\mathbf{P}$ van 1 naar 2 naar 3 naar 4 naar 5 naar 6 en naar 1) en a-periodiek ($\mathbf{P}(6, 6) = 1 - \frac{1}{2}(\exp(4/T) + \exp(3/T)) > 0$. Dus er is een rondwandeling in de graaf (nl. van 6 naar 6) ter lengte 1). De stelling van Perron--Frobenius garandeert ons onder deze voorwaarde het bestaan van een dominante vector.

Beschouw de vector $\mathbf{q}$ met als i-de coördinaat $\mathbf{q}(i) = \exp(-f_i/T)$. Zij $\mathbf{D}$ de diagonaal matrix met $\mathbf{q}(i)$ als (i,i) element. Merk op dat $\mathbf{D1} = \mathbf{q}$ voor $\mathbf{1} \equiv (1,1,\ldots,1)^T$.

Door invullen kan je nagaan (maar dat hoef je hier niet te doen) dat $\mathbf{PD} = \mathbf{DP}^T$.

c) Toon aan dat $\mathbf{q}$ een dominante eigenvector is van $\mathbf{P}$.

2 Oplossing. $\mathbf{Pq} = \mathbf{PD1} = \mathbf{D}(\mathbf{P}^T\mathbf{1}) = \mathbf{D}(\mathbf{1}^T\mathbf{P})^T = \mathbf{D1} = \mathbf{q}$. Hierbij is gebruikt dat in een kansmatrix de coëfficiënten in iedere kolom optellen tot 1: $\mathbf{1}^T\mathbf{P} = \mathbf{1}^T$. Dus $\mathbf{q}$ is een eigenvector bij eigenwaarde 1.
In een kansmatrix zijn alle eigenwaarden in absolute waarde ≤ 1. Omdat er een dominante eigenwaarde is (zie vorig onderdeel) en 1 een eigenwaarde is, is 1 de dominante eigenwaarde en $\mathbf{q}$ 'n dominante eigenvector (bij eigenwaarde 1).

Is $\mathbf{q}$ een kansvector?

1 Oplossing. Nee. De coëfficiënten zijn wel ≥ 0 maar tellen niet op tot 1.

d) Laat voor $T = \frac{1}{3}$ zien dat de kans dat op den duur door bovenstaand proces daadwerkelijk $i = 6$ gekozen wordt ongeveer $\frac{19}{20}$ is (hierbij mag je gebruiken dat $\exp(3) \approx 20$).

2 Oplossing. De vectoren $\mathbf{p}_k$ convergeren naar de dominante kans eigenvector en dat is $\widetilde{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}/\rho$ met $\rho = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{q}(j)$. Immers met deze schaling is $\widetilde{\mathbf{q}}$ een kansvector en een dominante eigenvector.
$\rho = \sum_{j=1}^{6} \exp(-f_j/T) = \sum_{j=0}^{5} \exp(-3j) = \sum_{j=0}^{5} (\exp(-3))^j \approx \sum_{j=0}^{5} (\frac{1}{20})^j \approx 1/(1-1/20) = 20/19$.
(Bij de tweede gelijkheid is gebruikt dat alle waarden $0,1,2,3,4,5$ is de f_i waarden allemaal precies een keer voorkomen. Verder is gebruikt dat $\exp(3) \approx 20$.) Dus $\widetilde{\mathbf{q}}(6)$, de kans dat op den duur $i_k = 6$ is, is $\mathbf{q}(6)/\rho = \exp(0)/\rho = 19/20$.

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.