Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Woensdag, 22 augustus 2012, 14:00-17:00, Aardwetenschappen, Grote Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

Opgave 1. Beschouw het volgende fictieve en zeer eenvoudige model voor de mogelijkheid dat iemand tijdens de herfst- en wintermaanden tegen een griep aanloopt.

We kijken om de week naar de gezondheidstoestand van een 'proefpersoon' en onderscheiden daarin drie mogelijkheden: gezond (toestand G), griep in de beginfase (B) en griep in de eindfase (E). De kans dat de proefpersoon, als hij/zij gezond is, griep oploopt en daarmee in toestand B komt blijkt 1/4 te zijn. Iemand met griep in de beginfase zit een week later automatisch in de eindfase. De kans op herstel van griep in de eindfase zetten we op q met $0 < q < 1$. We vatten dit model op als een Markovketen.

a) Stel de overgangsmatrix L op en onderzoek L op irreducibiliteit en periodiciteit.

b) Toon aan dat L een positieve dominante eigenwaarde heeft (zonder de eigenwaarden te berekenen, maar met de theorie van matrixrecursies). Hoe groot is deze?

c) Bepaal de kans dat we (op den duur) onze proefpersoon volgens dit model (op 'n peiltijdstip) gezond aantreffen.

d) Beredeneer het resultaat van de vorige vraag voor de gevallen $q = 1$ en $q = 0$.

Opgave 2. We bekijken in deze opgave een variant van het rups-sluipwespen model in §3.1 van het dictaat. Deze variant is gebaseerd op het Hassel-Lawton-May model.

Door handig te schalen kan de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie gemodelleerd worden door

$$\begin{cases} r_{n+1} = \kappa^3 \dfrac{r_n}{(1 + r_n + w_n)^3}, \\ w_{n+1} = b\, r_n\, w_n, \end{cases} \tag{1}$$

met r_n het aantal rupsen (op zekere schaal) en w_n aantal wespen (ook op zekere geschikte schaal), b en κ zijn zekere positieve constanten.

a) Bepaal voor alle $\kappa > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van κ en b af? Zo ja, hoe?

Uit a) blijkt dat $(1/b, \kappa - 1/b - 1)$ een evenwicht is. Neem verder $\kappa = 3$ en bekijk alleen $b \geq 1/2$, de waarden voor b waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

b) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan

$$\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda + 3 - 2/b = 0.$$

c) Bepaal voor welke waarden van b dit evenwicht stabiel is.
(*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van b, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reëel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

d) Voor welke waarden van b spiraliseert de oplossing in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht toe?

Opgave 3. Gemiddeld over een zeker gebied is, op tijdstip t, $x(t)$ de dichtheid van een gewas X en $y(t)$ de dichtheid van een ander gewas Y. De ontwikkeling van de dichtheden blijkt beschreven te kunnen worden door het volgende model:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \left(9 - x^2 - y^2\right) x \\ y' &=& (4 - x - y)\, y. \end{array}\right. \tag{2}$$

a) Hoe heet de ontwikkeling van de dichtheid van gewas Y indien gewas X afwezig is? Wat voor invloed heeft gewas X op de individuele groeisnelheid van gewas Y? Wat is de invloed van Y op X? Hoe zou je de interactie biologisch interpreteren?

b) Geef in het deel van het x-y–vlak dat biologisch relevant is aan waar $x' = 0$, 'respectievelijk $y' = 0$. Geef het tekenverloop van x' en y' aan (middels een pijltje) in het diagram dat zo ontstaat.

c) Bepaal de evenwichtspunten van dit groeimodel. Voor welke evenwichtspunten kan je op grond van de schets in b) de stabiliteit of de instabiliteit vaststellen? Beschrijf van welk type de evenwichtspunten zijn ("zadelpunt", of iets dergelijks). (Voer dit onderzoek grafisch uit, maar beargumenteer wel je antwoorden)

d) Na bemesting kan, voor zekere scalair α, de ontwikkeling van de dichtheden beschreven worden met het volgende model:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \left(9\alpha - x^2 - y^2\right) x \\ y' &=& (4\alpha - x - y)\, y. \end{array}\right. \tag{3}$$

Beide gewassen lijken relatief evenveel te profiteren van de bemesting. Toch pakt dit voor grotere $\alpha > 1$ slecht uit voor een van de gewassen. Op welk gewas doelen we? Waarom pakt het slecht uit? Wat gebeurt er? (Illustreer je argumenten in een plaatje.) Bepaal de kleinste α waarvoor het slecht uitpakt.

Opgave 4. X en multimiljonair Y spelen een spel. Uit een drietal kluizen, k_1, k_2 en k_3, met inhoud respectievelijk €2000, €3000 en €4000 kiest X er één. Y kiest gelijktijdig een sleutel die één van de kluizen opent. Y heeft drie sleutels: voor elke kluis een.

Als X kluis i gekozen heeft, en Y de sleutel die kluis j opent dan,

- wint X de inhoud van de door hem gekozen kluis als $i = j$,
- verliest X €1000 als $i < j$,
- verliest X €2000 als $i > j$.

X heeft als doel zijn minimaal gegarandeerde winst te maximaliseren, en speelt volgens een strategie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, waarbij x_i de kans is dat X kluis i kiest.

a) Geef de opbrengstmatrix voor X van dit spel.

b) Het bepalen van een optimale strategie voor X komt neer op het oplossen van een lineaire programmeringsprobleem. Formuleer dit lineaire programmeringsprobleem.

c) Los het lineaire programmeringsprobleem op. (*Hint: denk na over een zo efficiënt mogelijke basiskeuze.*) Is dit een eerlijk spel (d.w.z. is de waarde van het spel 0)?