Tentamen Modellen en Simulatie (WISB134)

Woensdag, 22 augustus 2012, 14:00-17:00, Aardwetenschappen, Grote Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen dat niet.

`Uitwerking. In kleine type-fonts letters.`

`Puntentelling.`

`Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.`

`Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.`

Opgave 1. Beschouw het volgende fictieve en zeer eenvoudige model voor de mogelijkheid dat iemand tijdens de herfst- en wintermaanden tegen een griep aanloopt.

We kijken om de week naar de gezondheidstoestand van een 'proefpersoon' en onderscheiden daarin drie mogelijkheden: gezond (toestand G), griep in de beginfase (B) en griep in de eindfase (E). De kans dat de proefpersoon, als hij/zij gezond is, griep oploopt en daarmee in toestand B komt blijkt 1/4 te zijn. Iemand met griep in de beginfase zit een week later automatisch in de eindfase. De kans op herstel van griep in de eindfase zetten we op q met $0 < q < 1$. We vatten dit model op als een Markovketen.

a) Stel de overgangsmatrix L op en onderzoek L op irreducibiliteit en periodiciteit.

3 Oplossing.

$$L = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & q \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-q \end{bmatrix}.$$ Hierbij hebben we gebruikt dat L een kansmatrix is (de coëfficiënten in iedere kolom tellen op tot 1) om $(1,1)$ en $(3,3)$-waarde te bepalen. De graaf van L (en dus L) is irreducibel.: je kunt in de graaf van ieder punt naar ieder ander punt lopen (ook als $q=1$. Als $q=0$ kunnen we niet van 3 weg en is L reducibel). L is a-periodiek: er is een rondwandeling (van punt 1 naar punt 1 rechtstreeks) van lengte 1.

b) Toon aan dat L een positieve dominante eigenwaarde heeft (zonder de eigenwaarden te berekenen, maar met de theorie van matrixrecursies). Hoe groot is deze?

3 Oplossing. Omdat alle coëfficiëneten van $L \geq 0$ zijn en L irreducibel en a-periodiek is, verzekert de stelling van Perron-Frobenius ons dat L een dominante eigenwaarde heeft die bovendien > 0 is. Omdat L een kansmatrix is heeft L een eigenwaarden 1 en alle andere (twee) eigenwaarden van L zijn in absolute waarde ≤ 1. Combineren we deze resultaten dan zien we dat 1 de dominante eigenwaarde is van L (voor alle $q \in (0,1]$).

c) Bepaal de kans dat we (op den duur) onze proefpersoon volgens dit model (op 'n peiltijdstip) gezond aantreffen.

3 Oplossing. Ongeacht de start convergeert het Markov process $p_{n+1} = Lp_n$ in dit geval (met 1 de dominante eigenwaarde) naar de dominante kans eigenvector, zeg $q = (q_1, q_2, q_3)^T$. Uit $Lq = q$ (eigenwaarde 1) en $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ (kansvector) volgt dat $q = \frac{1}{5q+1}(4q, q, 1)^T$. De kans dat we op den duur een gezond persoon aantreffen is de waarde van de eerste coördinaat van q, dus $4q/(5q+1)$. Dit geldt voor alle $q \in (0,1]$.

d) Beredeneer het resultaat van de vorige vraag voor de gevallen $q = 1$ en $q = 0$.

1 Oplossing. We hoeven alleen het resultaat voor $q = 0$ te bekijken.
Volgens bovenstaande formule $4q/(5q+1)$ is dat resultaat 0: op den duur is de kans 0 dat de proefpersoon gezond is. Dit resultaat klopt ook intuïtief: ieder week er een kans om in de beginfase van griep terecht te komen. Dat leidt vanzelf tot griep en daar genees je, als $q = 0$, niet meer van. Kortom , het deel van de bevolking dat gezond is neemt iedere week met een factor $1/4$ af. Op den duur is iedereen ziek.

Opgave 2. We bekijken in deze opgave een variant van het rups-sluipwespen model in §3.1 van het dictaat. Deze variant is gebaseerd op het Hassel-Lawton-May model.

Door handig te schalen kan de groei van een rupsen– en sluipwespenpopulatie gemodelleerd worden door

$$\begin{cases} r_{n+1} = \kappa^3 \dfrac{r_n}{(1 + r_n + w_n)^3}, \\ w_{n+1} = b\, r_n\, w_n, \end{cases} \tag{1}$$

met r_n het aantal rupsen (op zekere schaal) en w_n aantal wespen (ook op zekere geschikte schaal), b en κ zijn zekere positieve constanten.

a) Bepaal voor alle $\kappa > 0$ en $b > 0$ de evenwichtspunten van (1) die biologisch relevant zijn. Hangt dat ook nog van κ en b af? Zo ja, hoe?

2 Oplossing. Evenwicht in $(r_n, w_n) = (\alpha, \beta)$ voor alle n, dan geldt (tweede gelijkheid in (1)) dat $\beta = b\alpha\beta$. Dus of $\beta = 0$ of $1 = b\alpha$ waarmee $\alpha = 1/b$. Evenzo volgt uit de eerste gelijkheid dat $\alpha = 0$ of $(1 + \alpha + \beta)^3 = \kappa^3$. Combineren van deze mogelijkheden geeft:
I $\alpha = 0$, $\beta = 0$, II $\alpha = k - 1$ (de twee andere 3-de machtswortels uit k^3 zijn niet reëel en leveren biologisch irrelevante evenwichten op), $\beta = 0$, III $\alpha = 1/b$, $\beta = \kappa - 1 - 1/b$ (de andere machtswortels uit κ^3 leveren weer biologisch irrelevante evenwichten). Het 3-de evenwicht is biologisch alleen relevant als $\kappa - 1 - 1/b \geq 0$.

Uit a) blijkt dat $(1/b, \kappa - 1/b - 1)$ een evenwicht is. Neem verder $\kappa = 3$ en bekijk alleen $b \geq 1/2$, de waarden voor b waarvoor dit evenwicht biologisch relevant is.

b) Toon aan dat de eigenwaarden van de Jacobi matrix in dit evenwicht voldoen aan

$$\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda + 3 - 2/b = 0.$$

3 Oplossing. Met $f(r, w) \equiv \kappa^3 r/(1 + r + w)^3$ en $g(r, w) = brw$ is (1) gelijk aan $r_{n+1} = f(r_n, w_n)$ en $w_{n+1} = g(r_n, w_n)$. Omdat met $\kappa = 3$ in het evenwicht $(\alpha, \beta) = (1/b, 2 - 1/b)$ geldt $\frac{\partial f}{\partial r}(\alpha, \beta) = \kappa^3/(1 + \alpha + \beta)^3 - 3\kappa^3 r/(1 + \alpha + \beta)^4 = 1 - 1/b$, $\frac{\partial f}{\partial w}(\alpha, \beta) = -3r/(1 + \alpha + \beta)^4 = -1/b$, $\frac{\partial g}{\partial r}(\alpha, \beta) = b\beta = 2b - 1$ en $\frac{\partial g}{\partial w}(\alpha, \beta) = b\alpha = 1$, is de Jacobi matrix in het evenwicht gelijk aan $\begin{bmatrix} 1 - 1/b & -1/b \\ 2b - 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hiermee is het karakteristieke polynoom $(\lambda - 1 + 1/b)(\lambda - 1) + (2 - 1/b) = \lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda + 3 - 2/b$. De eigenwaarden zijn hiervan de nulpunten.

c) Bepaal voor welke waarden van b dit evenwicht stabiel is.
(*Hint: De eigenwaarden kunnen, afhankelijk van b, complex zijn. Toon eerst aan dat het evenwicht stabiel is als de eigenwaarden reëel zijn. Bekijk dan het complexe geval.*)

3 Oplossing. De eigenwaardenvergelijking luidt $\lambda^2 - (2 - 1/b)\lambda = 2/b - 3$.
Dus $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - 1/b \pm \sqrt{(2 - 1/b)^2 - 4(3 - 2/b)}) = \frac{1}{2}(2 - 1/b \pm \sqrt{(2 + 1/b)^2 - 12})$.
Voor stabiliteit moeten de eigenwaarden, in absolute waarde < 1 zijn.
Stel dat de eigenwaarden reëel zijn: $2 + 1/b \geq \sqrt{12} \Leftrightarrow b \leq (1 + \sqrt{3})/4$ (we bekijken alleen relevante b: $b \geq 0$). Dan hebben we stabiliteit als $1^2 - (2 - 1/b)1 > 2/b - 3 \Leftrightarrow b > 1/2$ en $(-1)^2 - (2 - 1/b)(-1) > 2/b - 3 \Leftrightarrow b > 1/2$ (merk op dat $b \geq 1/2$ de biologisch relevante waarden zijn voor b). Dus als $1/2 < b \leq (1 + \sqrt{3})/4$.
Als de eigenwaarden niet reëel zijn ($b > (1 + \sqrt{3})/4$), dan is $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$ en is $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1\lambda_2 = 3 - 2/b < 1 \Leftrightarrow 1 > b$. Dus als $(1 + \sqrt{3})/4 < b < 1$.
Stabiliteit als $1/2 < b < 1$. (Voor de 'randgevallen' $b = 1/2$ en $b = 1$ is een stabiliteitsuitspraak door lineariseren niet mogelijk en zouden apart bekeken moeten worden. Dat is hier niet de bedoeling.)

d) Voor welke waarden van b spiralizeert de oplossing in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht toe?

2 Oplossing. De oplossing spiralizeert als de eigenwaarden niet reëel zijn, dus als $b > (1+\sqrt{3})/4$. De oplossing gaat in de buurt van het evenwicht naar het evenwicht als het evenwicht stabiel is, dus $1/2 < b < 1$. Gecombineert (spiralizerend naar het evenwicht), als $1 > b > (1+\sqrt{3})/4$

Opgave 3. Gemiddeld over een zeker gebied is, op tijdstip t, $x(t)$ de dichtheid van een gewas X en $y(t)$ de dichtheid van een ander gewas Y. De ontwikkeling van de dichtheden blijkt beschreven te kunnen worden door het volgende model:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \left(9 - x^2 - y^2\right) x \\ y' & = & (4 - x - y)\, y. \end{array} \right. \tag{2}$$

a) Hoe heet de ontwikkeling van de dichtheid van gewas Y indien gewas X afwezig is? Wat voor invloed heeft gewas X op de individuele groeisnelheid van gewas Y? Wat is de invloed van Y op X? Hoe zou je de interactie biologisch interpreteren?

2 Oplossing. Y groeit 'logistisch' bij afwezigheid van X. Als X wel aanwezig is heeft dat een remmende invloed op de groei van Y. Y remt de groei van Xm (extra sterk bij grote dichtheden, zeer zwak bij lage dichtheden). Het model beschrijft concurerende soorten.

b) Geef in het deel van het x-y–vlak dat biologisch relevant is aan waar $x' = 0$, 'respectievelijk $y' = 0$. Geef het tekenverloop van x' en y' aan (middels een pijltje) in het diagram dat zo ontstaat.

2 Oplossing. Plaatje

c) Bepaal de evenwichtspunten van dit groeimodel. Voor welke evenwichtspunten kan je op grond van de schets in b) de stabiliteit of de instabiliteit vaststellen? Beschrijf van welk type de evenwichtspunten zijn ("zadelpunt", of iets dergelijks). (Voer dit onderzoek grafisch uit, maar beargumenteer wel je antwoorden)

3 Oplossing. Evenwicht als zowel $x' = 0$ en $y' = 0$. $x' = 0$ als $x = 0$ of $x^2 + y^2 = 9$. $y' = 0$ als $y = 0$ of $x + y = 4$. Combineren leidt tot de evenwichtspunten
I $(0,0)$, II $(0,4)$ III $(3,0)$, IV $(2+\sqrt{1/2}, 2-\sqrt{1/2})$, V $(2-\sqrt{1/2}, 2+\sqrt{1/2})$.

I instabiele knoop (alle oplossingen lopen van het evenwicht weg).
II stabiele knoop (alle oplossingen lopen naar het evenwicht toe).
III Zadelpunt (twee oplossingskrommen op de x-as lopen naar het evenwicht toe, de andere lopen er van weg).
IV stabiele knoop (alle oplossingen lopen naar het evenwicht toe).
V Zadelpunt (oplossingskrommen lopen naar het evenwicht toe, andere lopen er van weg).

d) Na bemesting kan, voor zekere scalair α, de ontwikkeling van de dichtheden beschreven worden met het volgende model:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \left(9\alpha - x^2 - y^2\right) x \\ y' & = & (4\alpha - x - y)\, y. \end{array} \right. \tag{3}$$

Beide gewassen lijken relatief evenveel te profiteren van de bemesting. Toch pakt dit voor grotere $\alpha > 1$ slecht uit voor een van de gewassen. Op welk gewas doelen we? Waarom pakt het slecht uit? Wat gebeurt er? (Illustreer je argumenten in een plaatje.) Bepaal de kleinste α waarvoor het slecht uitpakt.

3 Oplossing. Voor $\alpha < 9/8$ zijn er twee evenwichten van het type IV en V. De twee soorten kunnen (stabiel) naast elkaar bestaan met dichtheid $2+\sqrt{1/2}$ van soort X en dichtheid $2-\sqrt{1/2}$ van soort Y. Voor $\alpha = 9/8$ is er er voor $x > 0$ en $y > 0$ nog maar een evenwicht, nl. $(9/4, 9/4)$, en dat is instabiel. Voor $\alpha > 9/4$ is er geen evenwicht waarbij beide soorten voorkomen (d.w.z. met $x > 0$ en $y > 0$): een van de soorten sterft op den duur uit. Omdat III instabiel is en II stabiel zien we dat soort X uitsterft en de dichtheid van Y stabilseert op 4α.

Opgave 4. X en multimiljonair Y spelen een spel. Uit een drietal kluizen, k_1, k_2 en k_3, met inhoud respectievelijk €2000, €3000 en €4000 kiest X er één. Y kiest gelijktijdig een sleutel die één van de kluizen opent. Y heeft drie sleutels: voor elke kluis een.

Als X kluis i gekozen heeft, en Y de sleutel die kluis j opent dan,

- wint X de inhoud van de door hem gekozen kluis als $i = j$,
- verliest X €1000 als $i < j$,
- verliest X €2000 als $i > j$.

X heeft als doel zijn minimaal gegarandeerde winst te maximaliseren, en speelt volgens een strategie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, waarbij x_i de kans is dat X kluis i kiest.

a) Geef de opbrengstmatrix voor X van dit spel.

3 Oplossing. In M€ is de uitbetalingsmatrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Het bepalen van een optimale strategie voor X komt neer op het oplossen van een lineaire programmeringsprobleem. Formuleer dit lineaire programmeringsprobleem.

3 Oplossing. maximalizeer w onder de voorwaarden dat

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ en} \\ &2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq w \\ &-x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq w \\ &-x_1 - x_2 + 4x_3 \leq w. \end{aligned}$$

Merk op dat er geen positiviteitsrestrictie op w is.

c) Los het lineaire programmeringsprobleem op. (*Hint: denk na over een zo efficiënt mogelijke basiskeuze.*) Is dit een eerlijk spel (d.w.z. is de waarde van het spel 0)?

4 Oplossing. Breng het lineair programmeringsprobleem eerst op standaardvorm met slack variabelen x_4, x_4, x_5:

Maximalizeer w zo dat

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 - w = 0$

$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 - w = 0$

$-x_1 - x_2 + 4x_3 - x_6 - w = 0$

en $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

genoteerd als

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Omdat er geen positiviteitsrestrictie is op w, elimineren we w eerst. We doen dat met behulp van de 4-de rij:

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & \end{array}$$

Vind een basis J (een feasible oplossing): we proberen $J = (1,2,3)$ (als het probleem een oplossing heeft zal dat voor een $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ en $x_3 \geq 0$ zijn, d.w.z., er moet een feasible (x_1, x_2, x_3) zijn).

Vegen en schalen van de eerste drie kolommen en rijen geeft

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & 2/10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & \end{array}$$

Merk op dat het bijbehorend hoekpunt $(1/2, 3/10, 2/10, 0, 0, 0)$ feasible is, dat de cëfficiënten in de c-vector ≤ 0 zijn en dat we daarmee het optimaliserings probleem opgelost hebben $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 3/10, 2/10)$: de waarden op ...hoeven we niet te kennen. Invullen in de vergelijking $-x_1 - x_2 + 4x_3 - x_6 - w = 0$ (met $x_6 = 0$) leert dat $w = 0$. Kortom, eerlijk spel.

Merk op dat $J = (1,4,5)$ met $(x_1, \dots, x_6) = (1,0,0,3,0,0)$ ook een feasible hoekpunt levert dat i.p.v. $J = (1,23)$ als startpunt voor de simplex methode gebruikt had kunnen worden.