# **Tentamen Modellen en Simulatie** (WISB134)

Woensdag, 16 april 2014, 13:30-16:30, Educatorium Gamma Zaal

---

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het totaal aantal ingeleverde vellen.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Maximum te behalen punten per onderdeel staat schuingedrukt tussen vierkante haakjes *[zo]*. Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.

---

**Opgave 1**. Een model voor een slinger met wrijving wordt gegeven door

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\varepsilon y - \sin x. \end{cases} \tag{1}$$

Hierin is $x(t)$ de hoek die de slinger maakt met de verticale as, $y(t)$ de hoeksnelheid van de slinger, en $\varepsilon > 0$ de wrijvingsconstante.

**a)** *[4]* Bepaal de evenwichten van dit systeem, en bepaal de stabiliteit van die evenwichten. Voor welke waarden van $\varepsilon$ is de slinger *underdamped* (dwz. toont het nog oscillerend gedrag)?

Om de slinger te simuleren, wordt gekozen voor de methode van Euler, waardoor een recursie ontstaat:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \tau y_n, \\ y_{n+1} = y_n - \tau(\varepsilon y_n + \sin x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Hierin is $\tau > 0$ de tijdstap parameter.

**b)** *[2]* Laat zien dat de evenwichten van de slinger (1) ook evenwichten zijn van de methode van Euler (2).

**c)** *[4]* Een van de evenwichten van de slinger (1) is stabiel. Wij nemen aan dat $\varepsilon < 2$. Onder welke beperking aan $\tau$ is dit evenwicht ook stabiel voor de methode van Euler?

**Opgave 2**. Een vriendengroep bestaande uit twee dames en drie heren doet al lang mee aan een maandelijkse fietswedstrijd. Hiervoor maken ze gebruik van twee tandemfietsen, waarvan een tweepersoons en een driepersoons fiets. Alle vrienden fietsen mee op één van de fietsen in elke wedstrijd. Volgens de regels van de wedstrijd, worden elke maand de twee teams opgesteld door willekeurig twee mensen (één van ieder team) te ruilen ten opzichte van de opstelling van de maand ervoor.

Uit ervaring blijkt dat alleen de verhouding vrouwen tot mannen in de teams invloed heeft op de uitkomst van de wedstrijd. Met andere woorden, alle mannen zijn onderling uitwisselbaar, en alle vrouwen ook. In dit geval is het eenvoudig om na te gaan dat er drie mogelijke opstelling zijn, gegeven door de verhouding vrouwen tot mannen op de tweepersoons fiets: Toestand 1 (twee vrouwen), Toestand 2 (een vrouw, een man), Toestand 3 (twee mannen).

**a)** *[4]* Stel een kansmatrix $P$ op die weergeeft hoe de opstellingen van de teams in de tijd verandert. Teken de graaf van deze matrix. Als het je niet lukt om de matrix op te stellen, ga verder met het volgende matrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 1 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

**b)** *[3]* Maak gebruik van de graaf om te bepalen in hoeverre de stelling van Perron-Frobenius van toepassing is op $P$. Zonder te rekenen weten we dat er een stationaire toestandsvector is. Waarom? Bepaal deze vector(en) en bespreek de stabiliteit. (*Hint: Als* $\mathbf{p}$ *de stationaire toestandsvector is, en* $D = \text{diag}(\mathbf{p})$ *de diagonale matrix met* $\mathbf{p}$ *op de diagonaal, dan is* $PD = DP^T$ *een symmetrische matrix. De matrix* $D$ *schaalt de kolommen van* $P$ *zodanig dat er een symmetrische matrix ontstaat.*)

De vrouwen zijn sterk. Met z'n drieën op een fiets lukt het de mannen *net* om de vrouwen te verslaan. Echter als er precies twee mannen in een team zitten, werken ze elkaar tegen met een negatieve impact waardoor zo'n team nooit wint.

**c)** *[1]* De dames en heren hebben een kleine weddenschap afgesloten over de uitkomst. Als de winnende team uit minstens drie mannen bestaat, betalen de vrouwen samen 9 Euro aan de mannen. Anders betalen de mannen samen 1 Euro aan de vrouwen. Verdienen de dames of heren op den duur het meeste geld?

**d)** *[2]* Als in een wedstrijd twee mannen op de tweepersoonsfiets rijden (en dus verliezen), wat is de kans dat er precies drie maanden later *voor het eerst* een team met drie mannen wint?

**Opgave 3**. Het volgende model beschrijft het ziekteverloop in een groep mensen tengevolge van besmetting door de campylobactor bacterie (een "neefje" van de salmonella bacterie).

$$\begin{cases} x' = -ax + cz, \\ y' = ax - by, \\ z' = by - cz. \end{cases}$$

Hierin zijn $a, b, c$ bekende positieve constanten, $x(t)$ is het relatief aantal mensen in de groep op tijdstip $t$ dat vatbaar is voor de ziekte, maar niet besmet is, $y(t)$ is het deel van de groep dat op tijdstip $t$ besmet is en ziek is, $z(t)$ is het deel van de groep dat genezen is en (op tijdstip $t$) niet vatbaar is.

**a)** *[1]* Interpreteer de term $cz$ in de eerste en derde vergelijking. Gaat dit model ervan uit dat zieke mensen vatbare mensen kunnen besmetten?

**b)** *[3]* In dit model wordt er blijkbaar van uitgegaan dat $x + y + z$ constant is. Hoe blijkt dat? We nemen verder aan dat $x + y + z = 1$. Laat zien dat

$$\begin{cases} x' = -(a + c)x - cy + c \\ y' = ax - by \end{cases}$$

Bepaal het evenwicht (de evenwichten?) in termen van $a, b, c$ en $d \equiv ab + bc + ca$.

**c)** *[4]* Met $s = -(a+b+c)$ speelt de vergelijking

$$\lambda^2 - s\lambda + d = 0$$

een rol bij het vaststellen van de stabiliteit van dit evenwicht. Waarom?

**d)** *[2]* Bepaal de stabiliteit van het evenwicht in termen van $a, b$ en $c$.

**Opgave 4**. Een zekere Utrechtse wiskunde docent, woonzaam op IJburg te Amsterdam, besluit om voortaan per fiets naar de Uithof te komen. Hiervoor maakt hij gebruik van een snelle fiets met drie standen van elektrische trapversterking:

| Stand | Snelheid (km/uur) | Verbruik (W· h/km) |
|---|---|---|
| *Eco* | 24 | 1/2 |
| *Sport* | 36 | 3/5 |
| *Turbo* | 40 | 3/2 |

Zij $x_1, \ldots, x_3$ het aantal kilometers gefietst in *Eco*, *Sport*, *Turbo* standen, respectievelijk.

De docent wenst zijn totale afstand te maximalizeren onder de volgende voorwaarden: 1) De fiets heeft een accu met een bereik van 35 W·h, en de docent trapt natuurlijk liever niet zonder trapversterking. 2) De reistijd per openbaar vervoer is een zeer vervelende 1.5 uur. Met de fiets moet het sneller kunnen. 3) Er komt op zijn traject maar 20 km voor waar harder gereden kan worden dan 25 km/uur (door onevenheden in de weg, voetgangers, politietoezicht, enz.)

**a)** *[3]* Formuleer dit als een lineair programmeringsprobleem. (*Hint: Het is handig om alle vergelijkingen/ongelijkheden met gehele getallen op te schrijven. Bij voorwaarde 2 let op dat de tijd van een fietsrit van bijvoorbeeld $x_3$ km met 40 km/uur gelijk is aan $\frac{1}{40}x_3$ uur.*)

**b)** *[3]* Schrijf het probleem in de standaard gedaante.

**c)** *[3]* Vind met behulp van de simplexmethode een optimale oplossing. (*Hint: Het is handig om met gehele getallen te werken. Om dit te doen, stel de pivots niet op 1, maar herschaal steeds zowel de pivot rij als de te vegen rij. Vooral bij beperking 3 is het gemakkelijk om steeds te herschalen.*)

**d)** *[1]* Intepreteer de oplossing: haalt de docent de 43 kilometer afstand tussen IJburg en de Uithof voordat de accu leeg is? Zijn alle beperkingen relevant voor de optimum?