<u>Tentamen Modellen en Simulatie</u> (WISB134)

Woensdag, 16 april 2014, 13:30-16:30, Educatorium Gamma Zaal

- Schrijf op elk vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel je studentnummer en het <u>totaal aantal ingeleverde vellen</u>.
- Motiveer bij elke opgave duidelijk je antwoorden.
- Gebruik gerust resultaten uit voorgaande onderdelen ook als je geen bewijs hebt.
- Het dictaat, copiën van de transparanten en een eenvoudige rekenmachine mag gebruikt worden, uitwerkingen van opgaven, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Maximum te behalen punten per onderdeel staat schuingedrukt tussen vierkante haakjes *[zo]*. Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.

`Uitwerking.` In kleine type-fonts letters.

`Puntentelling.`

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.

Cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 4.

Opgave 1. Een model voor een slinger met wrijving wordt gegeven door

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\varepsilon y - \sin x. \end{cases} \tag{1}$$

Hierin is $x(t)$ de hoek die de slinger maakt met de verticale as, $y(t)$ de hoeksnelheid van de slinger, en $\varepsilon > 0$ de wrijvingsconstante.

a) *[4]* Bepaal de evenwichten van dit systeem, en bepaal de stabiliteit van die evenwichten. Voor welke waarden van ε is de slinger *underdamped* (dwz. toont het nog oscillerend gedrag)?

4 Oplossing. Evenwichten voldoen aan $x' = y \equiv 0$, $y' = \varepsilon y - \sin x \equiv 0$, oftewel $y = \sin x = 0$. Dus punten $(x, y) = (\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Wij beschouwen x modulo 2π en onderscheiden twee gevallen $x = 0$ en $x = \pi$. Stabiliteit eist $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$, voor $\lambda_{1,2}$ de eigenwaarden van de Jacobiaan: $D\mathbf{f} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{smallmatrix}\right]$. Het spoor en determinant zijn $s = -\varepsilon$ en $d = \cos x$ respectievelijk. Het evenwicht is stabiel als $s < 0$ en $d > 0$ en onstabiel o.a. als $d < 0$ (zie grafiek op pagina 82 van 'Lecture slides' over differentiaalvergelijkingen). Hieruit volgt dat het evenwicht $(x, y) = (0, 0)$ stabiel is en het evenwicht $(x, y) = (\pi, 0)$ onstabiel. Verder heeft de Jacobiaan complexe eigenwaarden als $d > s^2/4$. Dus is de slinger *underdamped* als $\varepsilon^2 < 4$, oftewel $\varepsilon < 2$.

Om de slinger te simuleren, wordt gekozen voor de methode van Euler, waardoor een recursie ontstaat:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \tau y_n, \\ y_{n+1} = y_n - \tau(\varepsilon y_n + \sin x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Hierin is $\tau > 0$ de tijdstap parameter.

b) *[2]* Laat zien dat de evenwichten van de slinger (1) ook evenwichten zijn van de methode van Euler (2).

2 Oplossing. Evenwichten van een recursie voldoen aan $x_{n+1} = x_n \equiv x$, $y_{n+1} = y_n \equiv y$. Wij stellen $x = x + \tau y$, $y = y - \tau(\varepsilon y + \sin x)$, waaruit blijkt dat de evenwichten aan $y = \sin x = 0$ voldoen. Deze komen dus overeen met die van (1).

c) *[4]* Een van de evenwichten van de slinger (1) is stabiel. Wij nemen aan dat $\varepsilon < 2$. Onder welke beperking aan τ is dit evenwicht ook stabiel voor de methode van Euler?

4 `Oplossing.` `Wij beschouwen het evenwicht` $(x,y)=(0,0)$. `Stabiliteit van een evenwicht van de afbeelding (2) eist` $|\lambda_{1,2}|<1$, `voor` $\lambda_{1,2}$ `de eigenwaarden van de Jacobiaan` $D\mathbf{F}=\left[\begin{smallmatrix}1 & \tau\\ -\tau & 1-\tau\varepsilon\end{smallmatrix}\right]$. `Het spoor en determinant zijn` $s=2-\tau\varepsilon$ `en` $d=1-\tau\varepsilon+\tau^2$ `respectievelijk. De karakteristieke vergelijkingen luidt` $\lambda^2-s\lambda+d=0$. `De discriminant is` $s^2-4d=\tau^2(\varepsilon^2-4)<0$ `onder de aanname. Omdat de matrix reëel is, zijn de eigenwaarden complex geconjugeerden,` $\lambda_2=\lambda_1^*$. `Omdat` $\lambda_1\lambda_2=d=|\lambda|^2$, `is het evenwicht stabiel als` $d<1$, `oftwel` $\tau<\varepsilon$.

Opgave 2. Een vriendengroep bestaande uit twee dames en drie heren doet al lang mee aan een maandelijkse fietswedstrijd. Hiervoor maken ze gebruik van twee tandemfietsen, waarvan een tweepersoons en een driepersoons fiets. Alle vrienden fietsen mee op één van de fietsen in elke wedstrijd. Volgens de regels van de wedstrijd, worden elke maand de twee teams opgesteld door willekeurig twee mensen (één van ieder team) te ruilen ten opzichte van de opstelling van de maand ervoor.

Uit ervaring blijkt dat alleen de verhouding vrouwen tot mannen in de teams invloed heeft op de uitkomst van de wedstrijd. Met andere woorden, alle mannen zijn onderling uitwisselbaar, en alle vrouwen ook. In dit geval is het eenvoudig om na te gaan dat er drie mogelijke opstelling zijn, gegeven door de verhouding vrouwen tot mannen op de tweepersoons fiets: Toestand 1 (twee vrouwen), Toestand 2 (een vrouw, een man), Toestand 3 (twee mannen).

a) *[4]* Stel een kansmatrix P op die weergeeft hoe de opstellingen van de teams in de tijd verandert. Teken de graaf van deze matrix. Als het je niet lukt om de matrix op te stellen, ga verder met het volgende matrix:

$$P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{8} & 0\\ 1 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8}\end{bmatrix}.$$

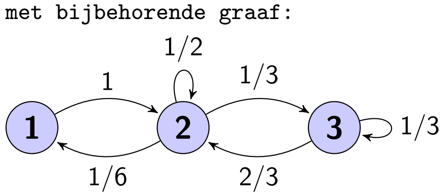
4 <u>Oplossing.</u> Vanuit Toestand 1 wordt altijd een vrouw gewisseld met een man en komen we in Toestand 2. Vanuit Toestand 3 wordt altijd een man van de tweepersoons fiets gewisseld, óf met de man óf met een van de twee vrouwen van de driepersoons fiets - de kans is dus 1/3 dat de verhouding gelijk blijft en 2/3 dat we in Toestand 2 komen. Toestand 2 heeft verhouding (2 pers.-3 pers.) van VM-VMM. De mogelijke wissels zijn:

van 2p-fiets	van 3p-fiets	nieuwe toestand
V	V	2
	M	3
	M	3
M	V	1
	M	2
	M	2

De kansen om na de wissel in Toestanden 1, 2, en 3 terecht te komen zijn dus (1/6, 1/2, 1/3), resp. Hieruit volgt de kansmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

met bijbehorende graaf:



b) *[3]* Maak gebruik van de graaf om te bepalen in hoeverre de stelling van Perron-Frobenius van toepassing is op P. Zonder te rekenen weten we dat er een stationaire toestandsvector is. Waarom? Bepaal deze vector(en) en bespreek de stabiliteit. (*Hint: Als* $\mathbf{p}$ *de stationaire toestandsvector is, en* $D = \operatorname{diag}(\mathbf{p})$ *de diagonale matrix met* $\mathbf{p}$ *op de diagonaal, dan is* $PD = DP^T$ *een symmetrische matrix. De matrix* D *schaalt de kolommen van* P *zodanig dat er een symmetrische matrix ontstaat.*)

3 <u>Oplossing.</u> De matrix is niet-negatief. De graaf is (i) irreducibel omdat er een pad bestaat van elke knoop naar elke andere knoop, en (ii) a-periodiek omdat een cyclus van lengte één voorkomt. De stelling van Perron-Frobenius is dus volledig van kracht. De stelling zegt dat er een reële, positieve, dominante eigenwaarde λ_1 is met bibehorende, reële niet-negatieve eigenvector $\mathbf{p}$. Omdat P een kansmatrix is, is $\lambda_1 = 1$. Op den duur convergeert de recursie $\mathbf{p}_{n+1} = P\,\mathbf{p}_n$ naar de stationaire $\mathbf{p}$. Voor $D = \operatorname{diag}(\mathbf{p})$ is PD symmetrisch. Door de eerste kolom met $1/6$ te vermenigvuldigen en de laatste met $1/2$ krijgen we symmetrische matrix, dus is $\mathbf{p} = c\,(1/6, 1, 1/2)^T$ voor c een constante. Om $\mathbf{p}$ een kansvector te maken kiezen we $c = 3/5$ en $\mathbf{p} = (1/10, 3/5, 3/10)^T$.

De vrouwen zijn sterk. Met z'n drieën op een fiets lukt het de mannen *net* om de vrouwen te verslaan. Echter als er precies twee mannen in een team zitten, werken ze elkaar tegen met een negatieve impact waardoor zo'n team nooit wint.

c) *[1]* De dames en heren hebben een kleine weddenschap afgesloten over de uitkomst. Als de winnende team uit minstens drie mannen bestaat, betalen de vrouwen samen 9 Euro aan de mannen. Anders betalen de mannen samen 1 Euro aan de vrouwen. Verdienen de dames of heren op den duur het meeste geld?

1 <u>Oplossing.</u> Op de duur winnen de heren 9 Euro met kans $1/10$, en winnen de dames 1 Euro met kans $9/10$. Het gaat alleen om de eer.

d) *[2]* Als in een wedstrijd twee mannen op de tweepersoonsfiets rijden (en dus verliezen), wat is de kans dat er precies drie maanden later *voor het eerst* een team met drie mannen wint?

2 `Oplossing.` `Om de bepalen wanneer dit voor het eerst gebeurt, stellen we de defectieve kansmatrix op (die weergeeft dat er bij de telling geen vervolg op Toestand 1 is)`

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

`Wij zijn geïnteresseerd in element` $(1,3)$ `van` $\widetilde{P}^3$`, dus:`

$$\mathbf{e}_1^T \widetilde{P}^3 \mathbf{e}_3 = (\widetilde{P}\mathbf{e}_1)^T \widetilde{P}(\widetilde{P}\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{54}.$$

Opgave 3. Het volgende model beschrijft het ziekteverloop in een groep mensen tengevolge van besmetting door de campylobactor bacterie (een "neefje" van de salmonella bacterie).

$$\begin{cases} x' = -ax + cz, \\ y' = ax - by, \\ z' = by - cz. \end{cases}$$

Hierin zijn a, b, c bekende positieve constanten, $x(t)$ is het relatief aantal mensen in de groep op tijdstip t dat vatbaar is voor de ziekte, maar niet besmet is, $y(t)$ is het deel van de groep dat op tijdstip t besmet is en ziek is, $z(t)$ is het deel van de groep dat genezen is en (op tijdstip t) niet vatbaar is.

a) *[1]* Interpreteer de term cz in de eerste en derde vergelijking. Gaat dit model ervan uit dat zieke mensen vatbare mensen kunnen besmetten?

1 `Oplossing.` `In de derde differentiaalvergelijk (dvg) leidt de term` cz `tot een afname van` z`, terwijl die term in de eerste dvg tot een toename van` x `leidt. Blijkbaar kunnen personen die genezen zijn en niet meer vatbaar, na verloop van tijd weer opnieuw vatbaar worden. Als zieke mensen vatbare mensen zouden kunnen besmetten dan zou een term met` y `van betekenis moeten zijn op de verandering in` x`. In de eerste dvg komt geen` y `voor. Blijkbaar kunnen zieke mensen vatbare mensen niet besmetten.`

b) *[3]* In dit model wordt er blijkbaar van uitgegaan dat $x + y + z$ constant is. Hoe blijkt dat? We nemen verder aan dat $x + y + z = 1$. Laat zien dat

$$\begin{cases} x' = -(a + c)x - cy + c \\ y' = ax - by \end{cases}$$

Bepaal het evenwicht (de evenwichten?) in termen van a, b, c en $d \equiv ab + bc + ca$.

3 `Oplossing.` `Tellen we de drie dvgs op, dan zien we dat` $(x + y + z)' = x' + y' + z' = 0$`. Omdat` $x + y + z$ `de primitieve is van een de 0 functie moet` $x + y + z$ `constant zijn. Vervangen we` $z = 1 - x - y$ `in de eerste differentiaalvergelijking dan zien we dat` $x' = -ax + cz = -ax + c(1 - x - y) = -(a + c)x - cy + c$`. Het systeem is in evenwicht als` $x'(t) = 0$ `en` $y'(t) = 0$ `voor alle` t`. Dan is` x `en` y `contant, zeg` $x(t) = \alpha$ `en` $y(t) = \beta$ `alle` t`. Dus` $0 = (-a + c)\alpha - c\beta + c$ `en` $0 = a\alpha - b\beta$ `Blijkbaar is` $\beta = \frac{a\alpha}{b}$ `en` $0 = -(a + c)\alpha - c\frac{a\alpha}{b} + c = \frac{\alpha}{b}(-ab - bc - ca) + c = \alpha\frac{d}{b} - c$`. Dus` $\alpha = \frac{bc}{d}$`,` $\beta = \frac{a\alpha}{b} = \frac{ac}{d}$`. En` $\gamma = 1 - \alpha - \beta = \frac{ba}{d}$`.`

c) *[4]* Met $s = -(a+b+c)$ speelt de vergelijking

$$\lambda^2 - s\lambda + d = 0$$

een rol bij het vaststellen van de stabiliteit van dit evenwicht. Waarom?

4 Oplossing. De Jacobi matrix in het evenwicht is gelijk aan

$$DF(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} -(a+c) & -c \\ a & -b \end{bmatrix},$$

met als karakteristieke vergelijking

$$(\lambda + (a+c))(\lambda + b) + ac = \lambda^2 + (a+b+c)\lambda + ab + cb + ac = \lambda^2 - s\lambda + d = 0.$$

De oplossingen λ_1 en λ_2 van deze vergelijking zijn de eigenwaarden van de Jacobi matrix. Als het reële deel van beide eigenwaarden < 0 is dan is het evenwicht stabiel.

d) *[2]* Bepaal de stabiliteit van het evenwicht in termen van a, b en c.

2 Oplossing. Als $s < 0$ en $d > 0$ dan zijn de reële delen van beide eigenwaarden < 0. Omdat $a, b, c > 0$ is $s < 0$ en $d > 0$. Dus is het evenwicht stabiel. We hebben te maken met een knop als $s^2 > 4d$ en met een spiraal als $s^2 < 4d$ (dan $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ en zijn de eigenwaarden niet reëel).
$s^2 < 4d \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 < 2d.$

Opgave 4. Een zekere Utrechtse wiskunde docent, woonzaam op IJburg te Amsterdam, besluit om voortaan per fiets naar de Uithof te komen. Hiervoor maakt hij gebruik van een snelle fiets met drie standen van elektrische trapversterking:

Stand	Snelheid (km/uur)	Verbruik (W· h/km)
Eco	24	1/2
Sport	36	3/5
Turbo	40	3/2

Zij $x_1, \ldots, x_3$ het aantal kilometers gefietst in *Eco*, *Sport*, *Turbo* standen, respectievelijk.

De docent wenst zijn totale afstand te maximalizeren onder de volgende voorwaarden: 1) De fiets heeft een accu met een bereik van 35 W·h, en de docent trapt natuurlijk liever niet zonder trapversterking. 2) De reistijd per openbaar vervoer is een zeer vervelende 1.5 uur. Met de fiets moet het sneller kunnen. 3) Er komt op zijn traject maar 20 km voor waar harder gereden kan worden dan 25 km/uur (door onevenheden in de weg, voetgangers, politietoezicht, enz.)

a) *[3]* Formuleer dit als een lineair programmeringsprobleem. (*Hint: Het is handig om alle vergelijkingen/ongelijkheden met gehele getallen op te schrijven. Bij voorwaarde 2 let op dat de tijd van een fietsrit van bijvoorbeeld x_3 km met 40 km/uur gelijk is aan $\frac{1}{40}x_3$ uur.*)

3 Oplossing. Wij willen de totale afstand $M = x_1 + x_2 + x_3$ maximaliseren onder de restricties:

$$\begin{array}{lll} (R1) & \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 35, & \Longleftrightarrow \quad 5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leq 350 \\ (R2) & \frac{1}{24}x_1 + \frac{1}{36}x_2 + \frac{1}{40}x_3 \leq \frac{3}{2}, & \Longleftrightarrow \quad 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 \leq 540 \\ (R3) & x_2 + x_3 \leq 20. & \Longleftrightarrow \quad x_2 + x_3 \leq 20 \end{array}$$

b) *[3]* Schrijf het probleem in de standaard gedaante.

3 Oplossing. Wij voegen slack variabelen x_4, x_5, x_6 toe, en schrijven het probleem in de standaard gedaante:

Maximaliseer $M = x_1 + x_2 + x_3$ onder restricties:
$5x_1 + 6x_2 + 15x_3 + x_4 = 350$
$15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + x_5 = 540$
$x_2 + x_3 + x_6 = 20$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Schematisch representeren we dit maximaliseringsprobleem, dat nu in standaard vorm is, als

$$\begin{array}{cccccc|c} 5 & 6 & 15 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 15 & 10 & 9 & 0 & 1 & 0 & 540 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & M \end{array}$$

c) *[3]* Vind met behulp van de simplexmethode een optimale oplossing. (*Hint: Het is handig om met gehele getallen te werken. Om dit te doen, stel de pivots niet op 1, maar herschaal steeds zowel de pivot rij als de te vegen rij. Vooral bij beperking 3 is het gemakkelijk om steeds te herschalen.*)

3 Oplossing. We zoeken eerst een feasible hoekpunt.
$\mathbf{h}_0 \equiv (0,0,0,350,540,20)^T$ is zo'n punt: $\mathbf{h}_0$ is in $\mathcal{V}$ en omdat met $J = (4,5,6)$ de matrix $\mathbf{A}(:,J) = \mathbf{I}$ inverteerbaar is, $\mathbf{h}_0(j) = 0$ als $j \notin J$ en $\mathbf{h}_0(j) \geq 0$ voor $j \in J$ is $\mathbf{h}_0$ een hoekpunt. Van de $\mathbf{c}$-vector, $\mathbf{c} \equiv (1,1,1,0,0,0)^T$ zijn de eerste drie coördinaten > 0. Keuze van ieder van deze drie coördinaten leidt tot een hoger waarde van de doelfunctie. We kiezen voor de eerste coördinaat: $j_0 = 1$. Dan is $\mathbf{r}_0 \equiv (1,0,0,-5,-15,0)^T$ een kern vector van $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ en geeft $\mathbf{h}_0 + \alpha\mathbf{r}_0$ een grotere waarde van de doelfunctie voor iedere $\alpha > 0$. We kiezen α maximaal zo dat $\mathbf{h}_0 + \alpha\mathbf{r}_0$ in $\mathcal{V}$. Dat is voor $\alpha = 540/15 = 36$ en $i_0 = 2$: we vegen met pivot $(2,1)$.

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 8 & 36 & 3 & 0 & 0 & 510 \\ 15 & 10 & 9 & 0 & 1 & 0 & 540 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline 0 & 5 & 6 & 0 & -1 & 0 & 15M - 540 \end{array}$$

Het volgende hoekpunt $\mathbf{h}_1$ is blijkbaar $(36,0,0,170,20)^T$ (en dat is conform $\mathbf{h}_0 + 36\mathbf{r}_0$). De nieuwe $\mathbf{c}$ vector is $(0,5,6,0,-1,0)^T$. We zoeken verbetering in de tweede coördinaat: $j_0 = 2$. Omdat $20/1 < 510/8/0.6$ is onze volgende pivot $(3,2)$ (motivatie als voorheen).

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 28 & 3 & 0 & -8 & 350 \\ 15 & 0 & -1 & 0 & 1 & -10 & 340 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -5 & 15M - 540 - 100 \end{array}$$

De nieuwe $\mathbf{c}$ vector is $(0,0,1,0,-5,-5)^T$. We zoeken verbetering in de derde coördinaat: $j_0 = 3$. De enige nog beschikbare pivot is $(1,3)$.

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 28 & 3 & 0 & -8 & 350 \\ 15 \cdot 28 & 0 & 0 & 3 & 28 & -288 & 28 \cdot 340 + 350 \\ 0 & 28 & 0 & -3 & 0 & 36 & 28 \cdot 20 - 350 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & -28 \cdot 5 & -132 & 28(15M - 540 - 100) - 350 \end{array}$$

Er is geen verbetering van de waarde van de doelfunctie meer mogelijk (alle coördinaten van de huidige $\mathbf{c}$ vector zijn ≤ 0). We vinden een optimaal hoekpunt (zie Stelling in het dictaat): $\mathbf{h}_3 = (23\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 0, 0, 0)^T$. De maximum volgt uit $28(15M - 540 - 100) - 350 = 0$, en is $M = 43\frac{1}{2}$.

d) *[1]* Intepreteer de oplossing: haalt de docent de 43 kilometer afstand tussen IJburg en de Uithof voordat de accu leeg is? Zijn alle beperkingen relevant voor de optimum?

1 `Oplossing.` `Met een maximum bereik van 43.5 km kan de docent net de Uithof bereiken. Omdat alle slackvariabelen nul zijn, worden zijn alle beperkingen van kracht.`