HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

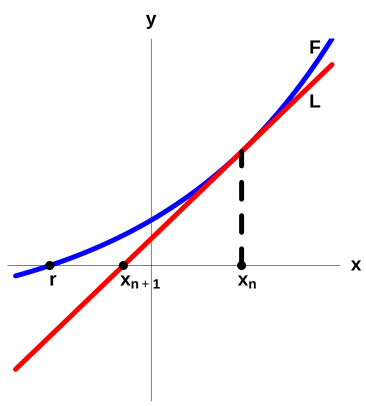
Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen van ongelijk gewicht. De waardering per vraag en per (verplicht) onderdeel staat aangegeven in de kantlijn. Onderdelen voorzien van het symbool ☞ zijn facultatief. Door deze vragen correct te beantwoorden kun je bonuspunten verdienen (de totaalscore kan echter niet hoger zijn dan 10). Verdeel je tijd goed over alle vragen. *Sla de bonusvragen in eerste instantie over. Beantwoord ze alleen als je tijd over hebt!*
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(20) **1.** The *methode van Newton* is een iteratieve formule waarmee numerieke oplossingen van een vergelijking $f(x)=0$ bepaald kunnen worden voor een gegeven functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, uitgaande van een startpunt x_0 in de buurt van de gezochte oplossing. De methode werkt als volgt. Laat F de grafiek zijn van de functie f, en L de raaklijn aan deze grafiek in het punt $(x_n, f(x_n))$, waarbij $x_n \in \mathbb{R}$ een benadering is van de gezochte oplossing r. Een (hopelijk!) betere benadering x_{n+1} wordt nu geconstrueerd door L te snijden met de x-as; zie Figuur 1.



Figuur 1: De grafieken F en L. De x-coordinaat van het snijpunt van F met de $x - as$ is de gezochte oplossing r waarvoor geldt $f(r)=0$.

(5) **a.** Laat zien dat de aldus geconstrueerde recurrente betrekking gegeven wordt door

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

Uit de figuur lees je af dat

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}\,.$$

(5) **b.** Zij r een evenwichtspunt van bovenstaande recursie en neem aan dat $f'(r) \neq 0$. Laat zien dat r in dat geval inderdaad een nulpunt is van f. Onder welke voorwaarde is dit punt stabiel/instabiel?
(*Hint:* Schrijf de recursie als $x_{n+1} = g(x_n)$.)

Definiëer de iteratiefunctie

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

De recursieformule luidt dan $x_{n+1} = g(x_n)$. Als r een evenwichtspunt is, dus $r = g(r)$, dan volgt onmiddellijk dat $f(r) = 0$, mits $f'(r) \neq 0$. Dit evenwicht is stabiel dan en slechts dan als $|g'(r)| < 1$, oftewel

$$\left| \frac{f(r)\, f''(r)}{f'(r)\, f'(r)} \right| < 1\,.$$

(5) **c.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Maak een schets van het pad $x_0 \to x_1 \to x_2 \ldots$ op bijgevoegd grafiekpapier. Toon vervolgens aan de hand van een geschikt gekozen functie aan dat Newton's methode niet altijd werkt.
(*Hint:* Vraag je af *waarom* de methode bij de geschetste grafiek "werkt". Zie ook onderdeel **b**.)

Neem bijvoorbeeld $f(x) = \sqrt{x}$, met als uniek nulpunt $r = 0$. Newton's methode volgend vinden we echter de recursie $x_{n+1} = -x_n$, welke ongeacht de keuze van de beginvoorwaarde $x_0 \neq 0$ divergeert.

(5) **d.** Een bekende methode om de wortel van een positief getal A te benaderen is de recursie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)\,.$$

Laat zien dat dit een speciaal geval is van Newton's methode.
(*Hint:* Kies een geschikte functie f welke $\sqrt{A}$ als nulpunt heeft.)

Neem $f(x) = x^2 - A$.

☞ **e.** Zie onderdeel **d**. Stel een analoge recursie op voor het iteratief benaderen van $\sqrt[k]{A}$ voor willekeurige $k = 1, 2, 3, \ldots$

Neem $f(x) = x^k - A$. Newton's methode is in dit geval equivalent met

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{A}{x_n}\right)\,.$$

(30) **2.** De omvang van de wereldbevolking op 22 augustus 2000 ($t = 0$) bedraagt om en nabij

$N = 6\,100$ miljoen mensen. We veronderstellen dat de omvang van de wereldbevolking $x(t)$ op tijdstip t voldoet aan de logistische vergelijking

$$(\star) \qquad \frac{dx}{dt} = \alpha\, x \left(1 - \frac{x}{M}\right).$$

Hierin zijn α en M positieve constanten. Populatie x en tijd t worden hierbij gerekend in miljoenen, respectievelijk jaren.

(5) **a.** Geef een interpretatie van de betekenis van α en M in dit model.

Uit $\lim_{t\to\infty} x(t) = M$ volgt dat M de limietpopulatie is. De factor α is de groeifactor in afwezigheid van—of onder verwaarlozing van—de remmende factor $1 - x/M$.

(5) **b.** Als $M \gg N$ zouden we de oplossing kunnen benaderen door $M = \infty$ te nemen. Los de vergelijking op uitgaande van deze benadering onder de beginvoorwaarde $x(0) = N$. Binnen welk tijdsinterval is dit een redelijke benadering, denk je? (Een beargumenteerde schatting voor dit tijdsinterval volstaat.)

Noem de functie die je krijgt als je $M = \infty$ stelt $\xi(t)$. Deze voldoet dus per definitie aan $\dot{\xi} = \alpha\,\xi$ met $\xi(0) = N$, dus $\xi(t) = N\,e^{\alpha\,t}$. Dit is wellicht een redelijke schatting zolang de verwaarloosde term $0 < x(t)/M \ll 1$ in de oorspronkelijke vergelijking maar klein genoeg is. Dus moet in ieder geval ook voor de benadering gelden dat $\xi(t)/M \ll 1$, oftewel

$$t \ll \frac{1}{\alpha} \ln \frac{M}{N}.$$

(10) **c.** De oplossing van de exacte vergelijking $(\star)$ onder beginvoorwaarde $x(0) = N$ is

$$x(t) = \frac{M\,N}{N + (M-N)e^{-\alpha\,t}}.$$

Bewijs dit op *twee* manieren:

- door $x(t)$ te substitueren in de d.v. $(\star)$, respectievelijk
- door de d.v. op te lossen met de methode van "scheiding van variabelen".

Scheiding van variabelen levert

$$x(t) = \frac{M\,N}{N + (M-N)e^{-\alpha\,t}}.$$

(Opmerking: Het is handig om eerst links en rechts door M te delen en de functie $y(t) = x(t)/M$ in te voeren. De vergelijking wordt dan $\dot{y} = \alpha\,y\,(1-y)$.)

(5) **d.** Men schat dat er in het komend jaar wereldwijd zo'n $g = 87$ miljoen mensen bijkomen. Zo'n 70 jaar geleden (op tijdstip $t_* = -70$) telde de wereldbevolking $K = 2\,000$ miljoen zielen. Leid uit deze gegevens vergelijkingen af voor de onbekende parameters α en M in termen van de variabelen g, N, K, t_* *zonder* daarbij hun numerieke waarden te gebruiken.
(*Hint:* Benader de groei in het komend jaar, $\Delta x = x(1) - x(0)$, door de instantane groei op $t = 0$, $\dot{x}(0)$.)

De groei van dit moment levert het verband

$$g = \alpha\,N \left(1 - \frac{N}{M}\right).$$

Het historisch gegeven levert een tweede vergelijking:

$$K = \frac{M\,N}{N+(M-N)e^{-\alpha\, t_*}}\,.$$

(Alle parameterwaarden invullend vinden we dan $\alpha \approx 0.0186$ en $M \approx 26\,286$.)

(5) **e.** Een numerieke oplossing voor het stelsel vergelijkingen uit onderdeel **d**, uitgaande van de data $g=87$, $N=6\,100$, $K=2\,000$ en $t_*=-70$, wordt gegeven door $\alpha \approx 0.0186$ en $M \approx 26\,286$. Gebruik deze waarden om te voorspellen wanneer de wereldbevolking zich zal hebben verdubbeld ten opzichte van het huidige aantal. (Ter vergelijking: Volgens een recente verklaring van de *US National Academy of Sciences* en de *British Royal Society* wordt een verdubbeling van de wereldbevolking verwacht rond het jaar 2050.)

Door $x(t_\star)=2\,N$ te stellen volgt

$$t_\star = \frac{1}{\alpha}\,\log\left(1+\frac{M}{M-2N}\right) \approx 56.6\,.$$

Dus volgens ons model mogen we ons rond het jaar 2056 verheugen op een verdubbeling van de wereldpopulatie, in redelijke overeenstemming met genoemde verklaring.

(25) **3.** Een projectiel wordt vanaf de maan verticaal omhoog geschoten met *ontsnappingssnelheid* v, dat wil zeggen met de minimale snelheid die nodig is om aan de zwaartekracht van de maan te ontsnappen. Aangezien de maan geen atmosfeer heeft ondervindt het projectiel geen weerstand. We verwaarlozen de zwaartekracht van andere hemellichamen dan de maan zelf. Deze laatste wordt gegeven door

$$(\dagger) \qquad F_z(r) = -G\,\frac{m\,M}{r^2}\,,$$

waarbij r de afstand van het projectiel is tot het middelpunt van de maan en G de universele gravitatieconstante. Verder is M de massa van de maan, R de straal van de maan en m de (constant verondersteld) massa van het projectiel.

(5) **a.** Veronderstel dat v afhangt van m, M, G en R. Geef de SI-eenheden (m, s, kg, enzovoort) van deze grootheden. Toon door middel van dimensionele analyse aan dat er een relatie bestaat van de vorm

$$F\left(\frac{m}{M}, \frac{v^2 R}{GM}\right) = 0\,,$$

voor één of andere functie $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (waarvan de precieze vorm er hier niet toe doet). (*Hint:* De SI-eenheid van G is $[G]=\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.)

Stel $v^\alpha m^\beta M^\gamma G^\delta R^\epsilon$ is dimensieloos. De volgende fundamentele schalen spelen een rol: LENGTE, TIJD, MASSA, met bijbehorende SI-eenheden m, s, respectievelijk kg. De eenheden van v, m, M, G en R zijn dus respectievelijk ms^{-1}, kg, kg, $\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ en m. Invullen in de dimensieloos veronderstelde grootheid levert drie vergelijkingen in vijf onbekenden:

$$\begin{cases} \alpha + 3\delta + \epsilon & = & 0 \\ -\alpha - 2\delta & = & 0 \\ \beta + \gamma - \delta & = & 0 \end{cases}$$

Kiezen we γ en ϵ als vrije parameters dan kan de oplossing geschreven worden als $\alpha = 2\epsilon$, $\beta = -\epsilon - \gamma$ en $\delta = -\epsilon$. De twee onafhankelijke dimensieloze variabelen kunnen gekozen worden als $x = m/M$ (parameterkeuze $(\gamma, \epsilon) = (-1, 0)$) en $y = v^2 R/(GM)$ (parameterkeuze $(\gamma, \epsilon) = (-1, 1)$. Aangezien er geen andere onafhankelijke dimensieloze grootheden in het spel zijn moeten x en y wel aan elkaar gerelateerd zijn, dat wil zeggen er is een relatie van de vorm $F(x, y) = 0$ voor geschikt gekozen F.

(5) **b.** Beargumenteer dat $v \propto \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$. Wat kun je zeggen over de evenredigheidsconstante?

Uit $F(x, y) = 0$ volgt, mits $F_y(x, y) \neq 0$, dat als x constant is, y ook constant moet zijn, zeg k^2 (alle grootheden zijn positief). Hieruit volgt $v = k\sqrt{GM/R}$, waarbij $k = k(m/M)$ mogelijkerwijs afhangt van de verhouding m/M.

(5) **c.** De bewegingsvergelijking voor de baan van het projectiel luidt

$$\begin{cases} m\,\ddot{r} &= F_z(r) \\ r(0) &= R \\ \dot{r}(0) &= v\,, \end{cases}$$

met $F_z(r)$ zoals gedefiniëerd in (†). Toon middels integratie aan dat de energiefunctie

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2(t) - G\,\frac{mM}{r(t)}$$

onafhankelijk is van t (energiebehoud).
(*Hint:* Vermenigvuldig linker- en rechterlid van de d.v. met $\dot{r}$.)

Vermenigvuldig de gegeven differentiaalvergelijking met $\dot{r}$ en integreer; E is de integratieconstante. Interpretatie: De totale energie bestaande uit kinetische energie (eerste term) plus potentiële energie (tweede term) is constant.

(5) **d.** Zie onderdeel **c**: Beargumenteer dat voor het projectiel geldt $E = 0$.
(*Hint:* Denk goed na over de definitie van "ontsnappingssnelheid".)

Dit volgt uit de definitie van de ontsnappingssnelheid v. $E = 0$ is namelijk consistent met de limiet $(r, \dot{r}) \to (\infty, 0)$. Voor $E > 0$ zal het projectiel kinetische energie, dus snelheid "overhouden" wanneer het inmiddels aan de zwaartekracht van de maan ontsnapt is ($(r, \dot{r}) \to (\infty, \sqrt{2E/m} > 0)$. Als $E < 0$ is de limiet $r \to \infty$ onmogelijk.

(5) **e.** Bepaal v in termen van m, M, G en R, gebruikmakend van **c** en **d**. Vergelijk je antwoord met onderdeel **b**. Wat valt je op?

Inspectie van $E = 0$ op tijdstip $t = 0$ toont aan dat

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = G\,\frac{m\,M}{R} \quad \text{ergo} \quad v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\,,$$

dus de evenredigheidsconstante $k = \sqrt{2}$ uit onderdeel b is kennelijk *onafhankelijk* van de massaverhouding projectiel:maan. Dit is een gevolg van de "identiteit van zware en trage massa": de factoren m in linker- en rechterlid in de vergelijking van Newton zijn identiek en kunnen dus weggedeeld worden.

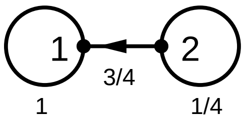
(25) **4.** Een aantal studenten doet verwoede pogingen een voldoende te halen voor het eerstejaars vak "Modellen en Simulatie". Sommigen slagen daar reeds na één tentamen in, anderen pas na een (aantal) hertentamen(s). De docent wil het tentamen enerzijds niet te gemakkelijk maken, maar anderzijds ook voorkomen dat hij teveel hertentamens moet nakijken. Hij schat dat driekwart van de studenten voor het tentamen slaagt en acht deze kans even groot voor de deelnemers aan eventuele hertentamens.

(5) **a.** Beargumenteer dat deelnemen aan een (her)tentamen geïnterpreteerd kan worden als een Markovketen met twee mogelijke toestanden: *toestand 1* $\equiv$ GESLAAGD, respectievelijk *toestand 2* $\equiv$ NIET GESLAAGD, met bijbehorende kansmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Eenmaal geslaagd heb je je tentamenbriefje binnen, dus $P_{11} = P(1 \to 1) = 1$ en $P_{21} = P(1 \to 2) = 0$. Ben je gezakt, of beter gezegd, nog niet geslaagd, dan is de kans dat je bij de eerstvolgende poging slaagt per aanname $P_{12} = P(2 \to 1) = 3/4$ en dus de kans dat je (alsnog) zakt $P_{22} = P(2 \to 2) = 1/4$.

(5) **b.** Teken de graaf behorend bij P. Is deze (ir)reducibel, (a)periodiek? Bepaal ook de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix P.



Figuur 2: Graafrepresentatie van de kansmatrix P.

P is reducibel want er is géén pad van GESLAAGD (1) naar NIET GESLAAGD (2). P is aperiodiek want er bestaat een pad van lengte 1. De eigenwaardenvergelijking luidt $4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ en heeft als oplossing $\lambda \in \{\frac{1}{4}, 1\}$. De bijbehorende eigenvectoren zijn (op een willekeurige niet-triviale scalaire factor na)

$$\vec{v}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_{\lambda=\frac{1}{4}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(10) **c.** Bewijs met volledige inductie dat

$$P^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 4^{-k} \\ 0 & 4^{-k} \end{pmatrix}.$$

Hoe groot is de kans dat een student na drie tentamenpogingen nog steeds niet geslaagd is?

Noem de matrix in het rechterlid P_k. Het is evident dat $P_1 = P$. Met volledige inductie volgt dat $P_k\, P = P^{k+1} = P_{k+1}$. In het bijzonder is de kans op drie achtereenvolgende missers gelijk aan $p = P^3_{2,2} = 4^{-3} = 1/64$.

(5) **d.** Beschouw een initiële toestand beschreven door een willekeurige kansvector $\vec{q}$. Bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} P^k\, \vec{q}$ en geef een interpretatie van het resultaat.

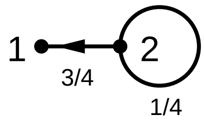
Uit onderdeel c volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} P^k\, \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ongeacht $\vec{q}$. Dat wil zeggen dat de volhouder bijna zeker zal slagen als hij/zij maar lang genoeg probeert. Als alternatieve methode kan men de begintoestand schrijven als lineaire combinatie van eigenvectoren: $\vec{q} = \alpha\, \vec{v}_1 + \beta\, \vec{v}_2$, zodat $P^k\, \vec{q} = \alpha\, \vec{v}_1 + 4^{-k}\, \beta\, \vec{v}_2$, waaruit volgt dat $\lim_{k\to\infty} P^k\, \vec{q} = \alpha\, \vec{v}_1$. De constante α volgt uit het feit dat P^k en dus ook de limietmatrix een kansmatrix is (zie onderdeel c); aangezien $\vec{v}_1$ een kansvector is geldt kennelijk $\alpha = 1$.

☞ **e.** Hoeveel pogingen (tentamen en hertentamens) moet een student *gemiddeld* ondernemen om voor het vak te slagen?
(*Hint:* Beschouw de defectieve kansmatrix $\widetilde{P}$ verkregen uit P door de eerste kolom op nul te zetten. Welke overgang(en) sluit je hiermee uit?)

Beschouw hiertoe de defectieve kansmatrix $\widetilde{P}$ verkregen uit P door de elementen in de eerste kolom op nul te zetten:



Figuur 3: Graafrepresentatie van de defectieve kansmatrix $\widetilde{P}$.

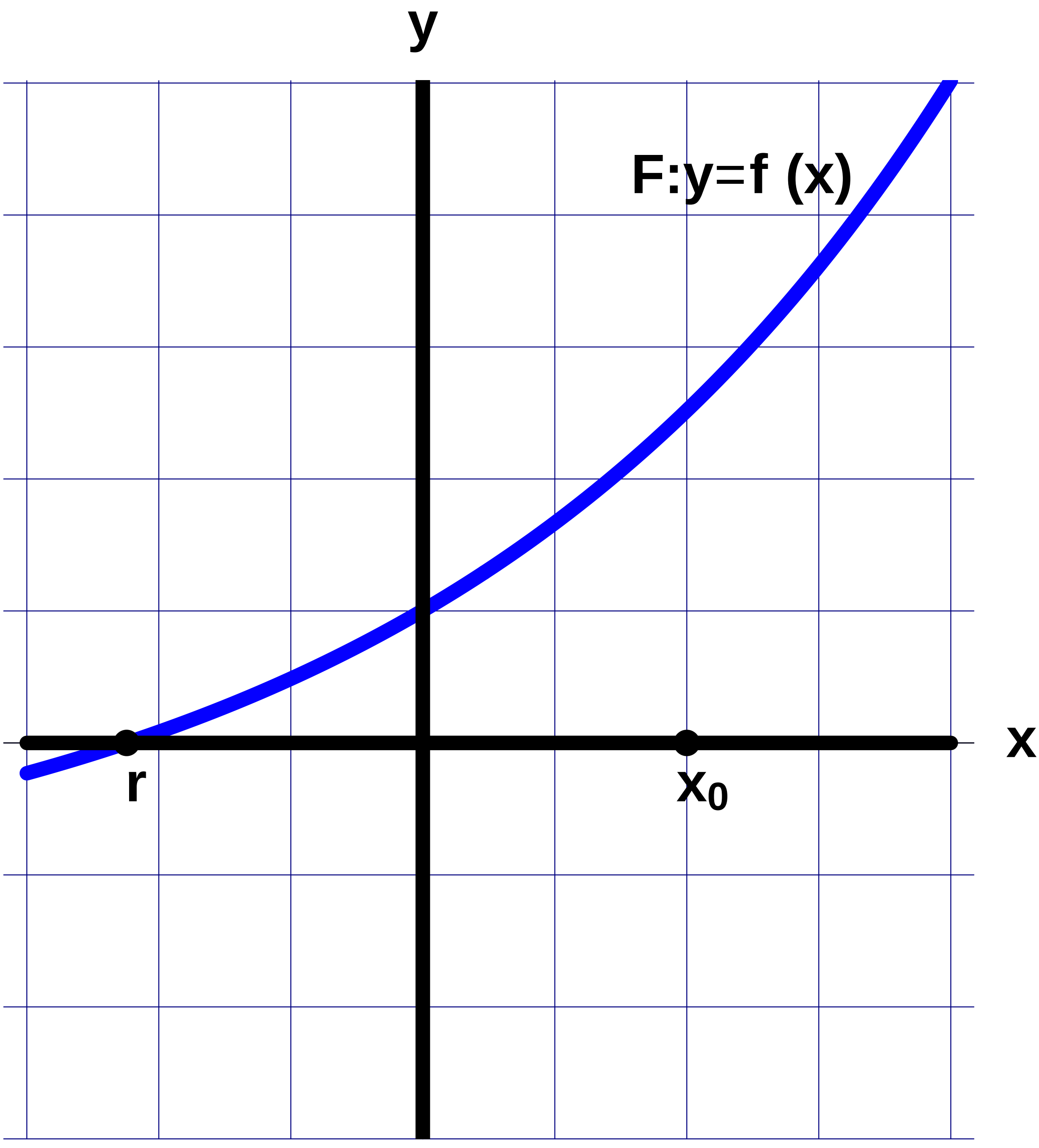
Hiermee sluit je de overgangen GESLAAGD $\rightarrow$ GESLAAGD en GESLAAGD $\rightarrow$ NIET GESLAAGD uit (de laatste was sowieso al nul). In dat geval is $\widetilde{P}^k_{1,2}$ de kans is dat een student het (her)tentamen *voor het eerst* haalt na precies k pogingen: NIET GESLAAGD $\xrightarrow{k}$ GESLAAGD. Het gemiddeld aantal pogingen is dus gelijk aan

$$\overline{k} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k \, \widetilde{P}^k \right]_{1,2} = \left[\widetilde{P} \, (I - \widetilde{P})^{-2} \right]_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \, .$$

EINDE

HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

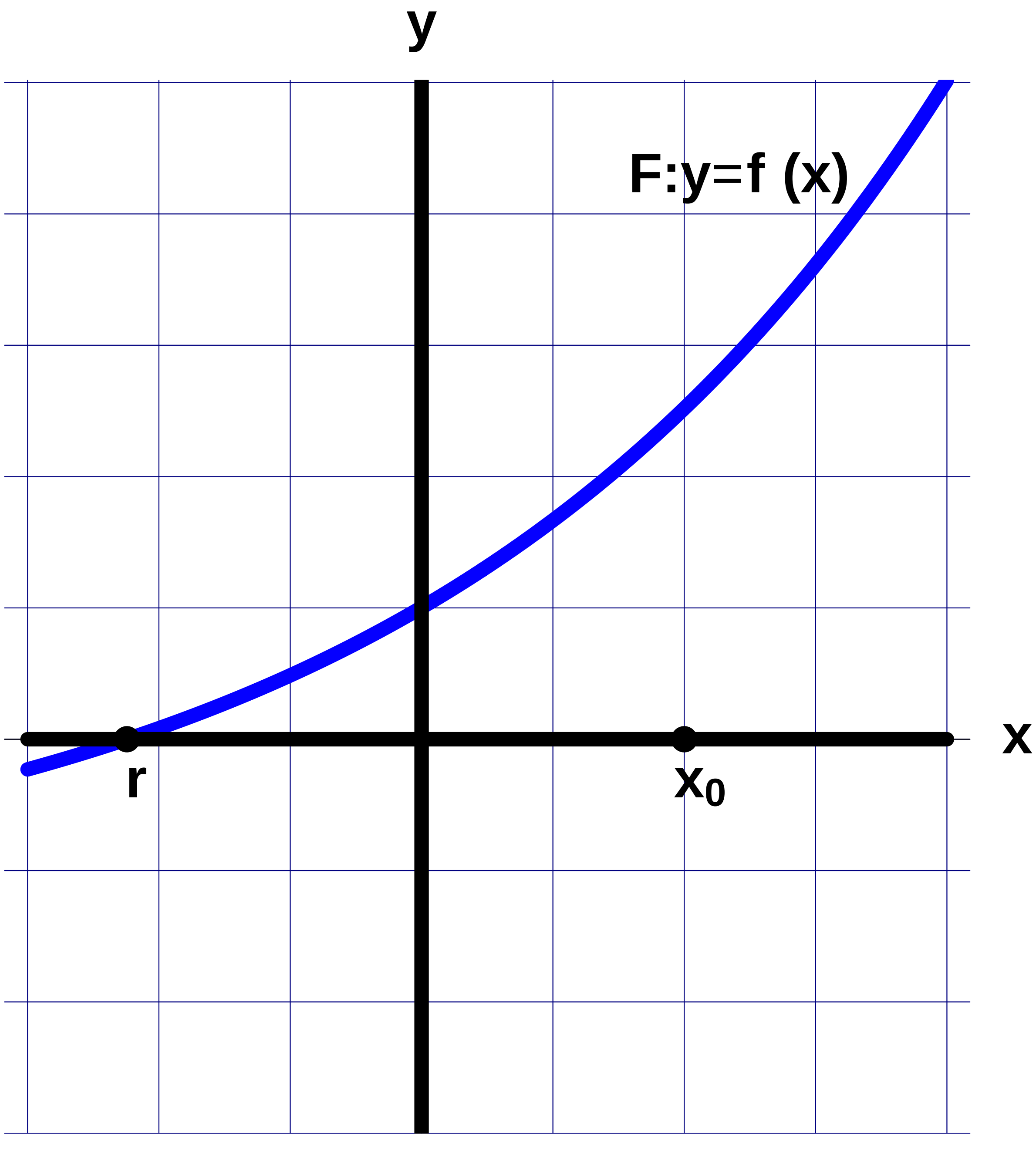
Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.



Figuur 4: Grafiek $F: y = f(x)$, nulpunt r en startpunt x_0.

HERTENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

Dinsdag 22 augustus 2000, 14.00–17.00 uur.



Figuur 4: Grafiek $F : y = f(x)$, nulpunt r en startpunt x_0.