TENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

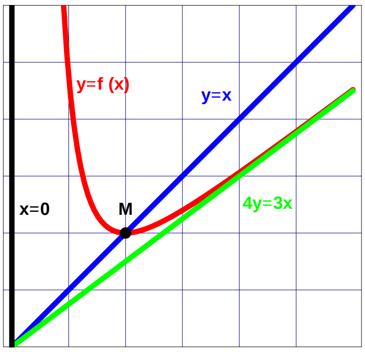
Dinsdag 4 juli 2000, 09.00–12.00 uur.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen van gelijk gewicht. De waardering per (verplicht) onderdeel staat aangegeven in de kantlijn. Onderdelen voorzien van het symbool ☞ zijn facultatief. Door deze vragen correct te beantwoorden kun je bonuspunten verdienen (de totaalscore kan echter niet hoger zijn dan 10). Verdeel je tijd goed over alle vragen. *Sla de bonusvragen in eerste instantie over. Beantwoord ze alleen als je tijd over hebt!*
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

1. Beschouw de recurrente betrekking $x_{n+1} = f(x_n)$ met beginvoorwaarde $x_0 > 0$, waarin $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de functie is met functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{4}(3x + \frac{A}{x^3})$ met $A > 0$ constant. Zie Figuur 1.



Figuur 1: Grafieken van $y = f(x)$, $y = x$, en scheve asymptoot $4y = 3x$. Het laagste punt op de grafiek van $y = f(x)$ is het punt $M = (x_*, x_*)$ met $x_* = \sqrt{\sqrt{A}}$. De y-as is een verticale asymptoot.

(10) **a.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Schets in de grafiek wat er gebeurt uitgaande van een startpunt $0 < x_0 < \sqrt{\sqrt{A}}$ na precies één iteratie. Bewijs vervolgens $x_n > \sqrt{\sqrt{A}}$ voor alle $n \geq 1$.

(10) **b.** Toon aan dat $x_* = \sqrt{\sqrt{A}}$ een evenwichtspunt is. Is dit stabiel of instabiel?

(5) **c.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Maak met een schets aannemelijk dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$.

☞ **d.** Onderbouw dit met een bewijs.

2. Er verspreidt zich een gerucht onder de Nederlandse bevolking. Op $t=0$ is een fractie α van de N miljoen Nederlanders ervan op de hoogte en dit aantal neemt op dat moment toe met R miljoen per dag. Zij $P(t)$ het (voor het gemak continu verondersteld) aantal mensen (uitgedrukt in miljoenen) dat op tijdstip $t \geq 0$ (gemeten in jaren[1]) van het gerucht op de hoogte is. We gaan uit van de veronderstelling dat de groei van dit aantal evenredig is met het aantal mogelijke contacten tussen hen die het gerucht inmiddels kennen en hen die het nog niet vernomen hebben. Numerieke gegevens: $\alpha=0.1$, $N=16$, $R=0.1$.

(5) **a.** Beargumenteer dat $P(t)$ voldoet aan de logistische vergelijking

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,(N-P)\ ,$$

voor zekere constante k. Bepaal ook de waarde van deze constante.

(10) **b.** Los de differentiaalvergelijking uit onderdeel **a** op onder de in de tekst vermelde gegevens.

(5) **c.** Hoe lang duurt het voordat het gerucht bij de helft van de Nederlandse bevolking bekend is? En bij de gehele Nederlandse bevolking?

(5) **d.** Veronderstel dat het roddelmechanisme waarmee geruchten zich in Spanje onder de nationale bevolking verspreiden identiek is aan dat in Nederland. Met "identiek" bedoelen we dat de verspreidingssnelheid op tijdstip $t=0$ *relatief gezien* (dat wil zeggen ten opzichte van de totale bevolking) gelijk is aan die in Nederland indien dezelfde fractie van de bevolking op dat moment van het gerucht op de hoogte is. Analoog aan de logistische vergelijking voor de Nederlandse bevolking hebben we dus de evolutievergelijking

$$\frac{dQ}{dt} = \ell\,Q\,(M-Q)\ ,$$

voor het aantal Spanjaarden $Q(t)$ dat van het gerucht op de hoogte is, waarbij M het totaal aantal Spanjaarden is en ℓ een constante. Wat is het verband tussen de constanten k en ℓ?

3. De volgende lineaire differentiaalvergelijking valt buiten het bestek van het college:

$$(\star)\quad \begin{cases} \ddot{x} + 4\,\epsilon\,\cos^2 t\,\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ \dot{x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Hierin is $\epsilon \ll 1/2$ een zeer kleine niet-negatieve parameter. Door gebruik te maken van het feit dat ϵ zeer klein is kunnen we toch proberen uitspraken te doen met betrekking tot de oplossing van $(\star)$ op grond van de behandelde collegestof.

(5) **a.** Bepaal de oplossing voor het geval $\epsilon=0$.

(5) **b.** Geef een interpretatie van het systeem $(\star)$ naar analogie met één van de drie typen vrije—

[1]CORRECTIE: hier had moeten staan "gemeten in *dagen*".

sterk, kritisch, respectievelijk zwak—gedempte harmonische oscillatoren. Wat voor soort oplossing verwacht je kwalitatief gezien?

(10) **c.** De onder **a** gevonden oplossing is een nogal grove benadering waarbij de wrijving geheel verwaarloosd wordt. Daardoor mist de oplossing echter het karakteristieke dempingsgedrag. We willen daarom een betere benadering construeren die hier wel rekening mee houdt. Uitgangspunt is de aanname dat de oplossing bij benadering periodiek is, met ongeveer dezelfde periode als in het wrijvingsloze geval (zie onderdeel **a**), en dat we de coëfficiënt $c(t)=4\epsilon\cos^2 t$ mogen benaderen door zijn gemiddelde over één volle periode. Stel de differentiaalvergelijking op voor de aldus gedefiniëerde benadering en los deze op onder dezelfde beginvoorwaarden als voorheen.
(*Hint:* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt=\frac{1}{2}$.)

(5) **d.** Zij $x(t)$ de exacte oplossing van de differentiaalvergelijking $(\star)$ en $\widetilde{x}(t)$ de benadering uit onderdeel **c**. Men kan laten zien dat $x(t)-\widetilde{x}(t)=\mathcal{O}(\epsilon)$. Schrijf daarom $x(t)=\widetilde{x}(t)+\epsilon u_\epsilon(t)$.

d1. Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan $u_\epsilon(t)$ voldoet.

Zij $u_0(t)=u_{\epsilon=0}(t)$ de benadering die je krijgt door $\epsilon=0$ te stellen in de vergelijking voor $u_\epsilon(t)$.

d2. Toon aan dat $u_0(t)$ voldoet aan

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 + u_0 = 2\cos 2t \sin t \\ u_0(0)=0\ ,\ \dot{u}_0(0)=0\ . \end{cases}$$

☞ **e.** Los het beginwaardenprobleem voor $u_0(t)$ uit onderdeel **d2** op.
(*Hint:* Poneer een particuliere oplossing van het type $u_{\mathrm{part}}(t)=\alpha t\cos t+\beta t\sin t+\gamma\cos 3t+\delta\sin 3t$ en gebruik de goniometrische identiteit $2\cos\phi\sin\psi=\sin(\phi+\psi)-\sin(\phi-\psi)$.)

4. Een auto-importeur prijst een tweetal varianten van een exclusief automerk in zijn showroom aan, één sedan versie en één cabriolet versie. De bruto winst per sedan bedraagt 225 duizend gulden, die voor een cabriolet 300 duizend gulden. Hij denkt in totaal maximaal 80 auto's te kunnen verkopen. De fabrikant kan binnen de door de importeur gewenste levertijd van 100 dagen slechts een beperkt aantal auto's leveren. Voor het produceren van één sedan heeft hij 1 dag nodig. Een cabriolet is arbeidsintensiever en kost 2 dagen. Verder zijn er 4 arbeidskrachten nodig voor het assembleren van één sedan, en 7 voor de afwerking van één cabriolet. In totaal heeft de fabrikant de beschikking over 280 arbeidskrachten, die zowel voor het maken van sedans als cabriolets inzetbaar zijn.

(5) **a.** Het blijkt dat voor dit luxe type auto vrijwel uitsluitend vraag bestaat naar de sedan versie. Toch wil de importeur ook graag een paar cabriolets in huis hebben. De aantrekkelijk ogende cabriolet is namelijk interessant als publiekstrekker om potentiële klanten naar de showroom te lokken. De importeur bestelt daarom precies 2 cabriolets, en voor de rest net zoveel sedans als de fabrikant kan leveren tot een totaal van maximaal 80 auto's. Hoeveel sedans kan de

importeur binnen de gestelde voorwaarden maximaal inkopen? Hoeveel bruto winst levert hem dit op, ervan uitgaand dat hij alle auto's weet te verkopen?

(10) **b.** Los het volgende vraagstuk *grafisch* op: Indien de importeur zou streven naar maximale bruto winst, hoeveel sedans en cabriolets had hij dan moeten inkopen? En wat zou dan zijn bruto winst geweest zijn?

(10) **c.** Idem als onderdeel **b**, maar nu gebruik makend van de *simplexmethode*.

EINDE