TENTAMEN MODELLEN EN SIMULATIE

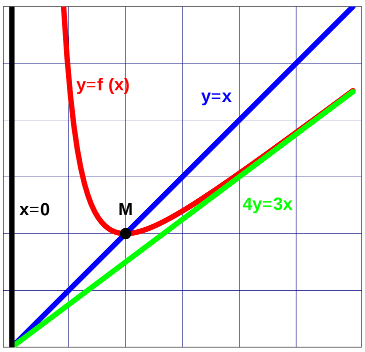
Dinsdag 4 juli 2000, 09.00–12.00 uur.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen van gelijk gewicht. De waardering per (verplicht) onderdeel staat aangegeven in de kantlijn. Onderdelen voorzien van het symbool ☞ zijn facultatief. Door deze vragen correct te beantwoorden kun je bonuspunten verdienen (de totaalscore kan echter niet hoger zijn dan 10). Verdeel je tijd goed over alle vragen. *Sla de bonusvragen in eerste instantie over. Beantwoord ze alleen als je tijd over hebt!*
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

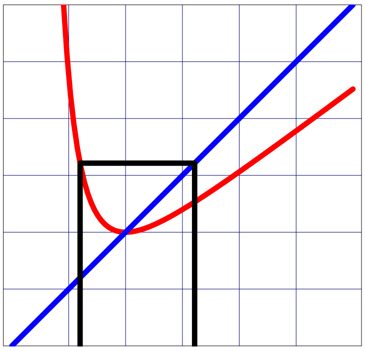
VEEL SUCCES!

1. Beschouw de recurrente betrekking $x_{n+1} = f(x_n)$ met beginvoorwaarde $x_0 > 0$, waarin $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de functie is met functievoorschrift $f(x) = \frac{1}{4}(3x + \frac{A}{x^3})$ met $A > 0$ constant. Zie Figuur 1.



Figuur 1: Grafieken van $y = f(x)$, $y = x$, en scheve asymptoot $4y = 3x$. Het laagste punt op de grafiek van $y = f(x)$ is het punt $M = (x_*, x_*)$ met $x_* = \sqrt{\sqrt{A}}$. De y-as is een verticale asymptoot.

(10) **a.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Schets in de grafiek wat er gebeurt uitgaande van een startpunt $0 < x_0 < \sqrt{\sqrt{A}}$ na precies één iteratie. Bewijs vervolgens $x_n > \sqrt{\sqrt{A}}$ voor alle $n \geq 1$.

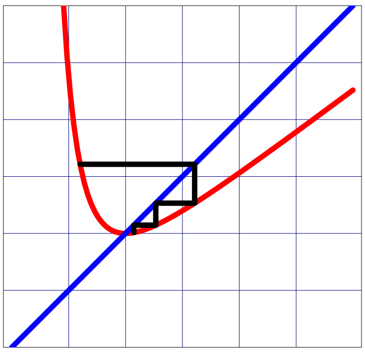


Figuur 2: Als voorheen met hierin aangegeven het pad $(x_0, 0) \to (x_0, x_1) \to (x_1, x_1) \to (x_1, 0)$. Na één iteratie beland je altijd rechts van het evenwichtspunt. Omdat $f(x) > x_*$ zodra $x > x_*$ geldt dus dat $x_{n+1} = f(x_n) > x_*$.

(10) **b.** Toon aan dat $x_* = \sqrt{\sqrt{A}}$ een evenwichtspunt is. Is dit stabiel of instabiel?

Het is eenvoudig in te zien dat $x_* = f(x_*)$. Verder is $f'(x_*) = 0$, dus hebben we te maken met een stabiel evenwichtspunt.

(5) **c.** (Gebruik bijgevoegd grafiekpapier.) Maak met een schets aannemelijk dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$.



Figuur 3: Analoog aan de constructie uit de vorige figuur kan men de iteratie grafisch voortzetten. Eenmaal rechts van de verticaal $x = x_*$ aanbeland convergeren de paden trapsgewijs naar links afdalend naar het evenwichtspunt (x_*, x_*).

☞ **d.** Onderbouw dit met een bewijs.

Uit voorgaande volgt dat $f(x) - x_* \geq 0$ voor alle $x > 0$. Anderzijds is $x = x_*$ een nulpunt van $f(x) - x_*$; factorisatie levert $f(x) - x_* = \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left\{\frac{x_*}{x} + \left(\frac{x_*}{x}\right)^2 + \left(\frac{x_*}{x}\right)^3\right\}\right](x - x_*) \leq \frac{3}{4}(x - x_*)$ voor alle $x \geq x_*$. Dit is ook in de grafiek van onderdeel a te zien: Verticale translatie van de scheve asymptoot over $\frac{1}{4}x_*$ levert een lijn die rechts van het evenwichtspunt geheel boven de grafiek van $y = f(x)$ ligt. Conclusie: $0 \leq f(x) - x_* \leq \frac{3}{4}(x - x_*)$ voor alle $x \geq x_*$, ergo $0 \leq x_{n+1} - x_* \leq \frac{3}{4}(x_n - x_*)$, en middels volledige inductie $0 \leq x_{n+1} - x_* \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (x_1 - x_*)$. Gevolg: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$.

2. Er verspreidt zich een gerucht onder de Nederlandse bevolking. Op $t = 0$ is een fractie α van de N miljoen Nederlanders ervan op de hoogte en dit aantal neemt op dat moment toe met R miljoen per dag. Zij $P(t)$ het (voor het gemak continu veronderstelde) aantal mensen (uitgedrukt in miljoenen) dat op tijdstip $t \geq 0$ (gemeten in jaren[1]) van het gerucht op de hoogte is. We gaan uit van de veronderstelling dat de groei van dit aantal evenredig is met het aantal mogelijke contacten tussen hen die het gerucht inmiddels kennen en hen die het nog niet vernomen hebben. Numerieke gegevens: $\alpha = 0.1$, $N = 16$, $R = 0.1$.

(5) **a.** Beargumenteer dat $P(t)$ voldoet aan de logistische vergelijking

$$\frac{dP}{dt} = k\,P\,(N - P)\ ,$$

voor zekere constante k. Bepaal ook de waarde van deze constante.

$\dot{P}(t)$ is evenredig met zowel $P(t)$ als $N - P(t)$. De constante k volgt uit het gegeven $R = \dot{P}(0) = k\,P(0)(N - P(0))$. Met $P(0) = \alpha\,N$, $\alpha = 0.1$, en met R en N uitgedrukt in miljoenen levert dit

$$k = \frac{R}{\alpha\,(1-\alpha)\,N^2} \approx 4.34\,10^{-3} \qquad \text{(per miljoen per dag).}$$

(10) **b.** Los de differentiaalvergelijking uit onderdeel **a** op onder de in de tekst vermelde gegevens.

Scheiding van variabelen levert

$$P(t) = \frac{\alpha\,e^{Nkt}}{1-\alpha+\alpha\,e^{Nkt}}\,N \approx \frac{16.0\,e^{0.06944\,t}}{9.0+e^{0.06944\,t}}\,.$$

(5) **c.** Hoe lang duurt het voordat het gerucht bij de helft van de Nederlandse bevolking bekend is? En bij de gehele Nederlandse bevolking?

Uit $P(t_*) = N/2$ volgt

$$t_* = \frac{1}{Nk}\,\log\frac{1-\alpha}{\alpha} \approx 31.6 \qquad \text{(dagen).}$$

Aangezien $P(t) < N$ voor alle $t \geq 0$ zal het gerucht nooit alle Nederlanders bereiken.

(5) **d.** Veronderstel dat het roddelmechanisme waarmee geruchten zich in Spanje onder de nationale bevolking verspreiden identiek is aan dat in Nederland. Met "identiek" bedoelen we dat de verspreidingssnelheid op tijdstip $t = 0$ *relatief gezien* (dat wil zeggen ten opzichte van de totale bevolking) gelijk is aan die in Nederland indien dezelfde fractie van de bevolking op dat moment van het gerucht op de hoogte is. Analoog aan de logistische vergelijking voor de Nederlandse bevolking hebben we dus de evolutievergelijking

$$\frac{dQ}{dt} = \ell\,Q\,(M - Q)\ ,$$

voor het aantal Spanjaarden $Q(t)$ dat van het gerucht op de hoogte is, waarbij M het totaal aantal Spanjaarden is en ℓ een constante. Wat is het verband tussen de constanten k en ℓ?

Definiëer de relatieve grootheden $p(t) = P(t)/N$ en $q(t) = Q(t)/M$. Voor $t = 0$ geldt dan $p(0) = q(0) = \alpha$ en $Nk\,\alpha\,(1-\alpha) = \dot{p}(0) = \dot{q}(0) = M\ell\,\alpha\,(1-\alpha)$, dus $Nk = M\ell$.

[1] CORRECTIE: hier had moeten staan "gemeten in *dagen*".

3. De volgende lineaire differentiaalvergelijking valt buiten het bestek van het college:

$$(\star)\quad \begin{cases} \ddot{x} + 4\,\epsilon\,\cos^2 t\,\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ \dot{x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Hierin is $\epsilon \ll 1/2$ een zeer kleine niet-negatieve parameter. Door gebruik te maken van het feit dat ϵ zeer klein is kunnen we toch proberen uitspraken te doen met betrekking tot de oplossing van $(\star)$ op grond van de behandelde collegestof.

(5) **a.** Bepaal de oplossing voor het geval $\epsilon = 0$.

Als $\epsilon = 0$ dan $x(t) = \cos t$.

(5) **b.** Geef een interpretatie van het systeem $(\star)$ naar analogie met één van de drie typen vrije—sterk, kritisch, respectievelijk zwak—gedempte harmonische oscillatoren. Wat voor soort oplossing verwacht je kwalitatief gezien?

Naar analogie met de vergelijking $\ddot{x}+c\,\dot{x}+x=0$ met constante $c \geq 0$ kunnen we de functie $c(t) = 4\epsilon\cos^2 t \geq 0$ opvatten als een variabele wrijvingscoëfficiënt. De discriminant van de karakteristieke vergelijking luidt in dit geval $D(t) = 16\epsilon^2\cos^4 t - 4 < 0$ voor alle t. We hebben dus te maken met een zwak gedempte harmonische oscillator onderhevig aan geringe, zij het variabele wrijving. Je verwacht een zwakgedempte, langzaam naar evenwicht convergerende oscillerende oplossing.

(10) **c.** De onder **a** gevonden oplossing is een nogal grove benadering waarbij de wrijving geheel verwaarloosd wordt. Daardoor mist de oplossing echter het karakteristieke dempingsgedrag. We willen daarom een betere benadering construeren die hier wel rekening mee houdt. Uitgangspunt is de aanname dat de oplossing bij benadering periodiek is, met ongeveer dezelfde periode als in het wrijvingsloze geval (zie onderdeel **a**), en dat we de coëfficiënt $c(t) = 4\epsilon\cos^2 t$ mogen benaderen door zijn gemiddelde over één volle periode. Stel de differentiaalvergelijking op voor de aldus gedefiniëerde benadering en los deze op onder dezelfde beginvoorwaarden als voorheen.
(*Hint:* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}$.)

De gemiddelde wrijvingscoëfficiënt bedraagt

$$\overline{c} = \frac{1}{T}\int_0^T c(t)\,dt = \frac{4\,\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = 2\,\epsilon\,,$$

dus de gemodificeerde differentiaalvergelijking wordt

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\,\epsilon\,\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1\ ,\ \dot{x}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Oplossing: $\widetilde{x}(t) = e^{-\epsilon t}\cos t\sqrt{1-\epsilon^2} + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}e^{-\epsilon t}\sin t\sqrt{1-\epsilon^2} \approx e^{-\epsilon t}\cos t$.

(5) **d.** Zij $x(t)$ de exacte oplossing van de differentiaalvergelijking $(\star)$ en $\widetilde{x}(t)$ de benadering uit onderdeel **c**. Men kan laten zien dat $x(t) - \widetilde{x}(t) = \mathcal{O}(\epsilon)$. Schrijf daarom $x(t) = \widetilde{x}(t) + \epsilon u_\epsilon(t)$.

d1. Bepaal de differentiaalvergelijking waaraan $u_\epsilon(t)$ voldoet.

Zij $u_0(t) = u_{\epsilon=0}(t)$ de benadering die je krijgt door $\epsilon = 0$ te stellen in de vergelijking voor $u_\epsilon(t)$.

d2. Toon aan dat $u_0(t)$ voldoet aan

$$\begin{cases} \ddot{u}_0 + u_0 = 2\cos 2t \sin t \\ u_0(0) = 0 \;,\; \dot{u}_0(0) = 0 \,. \end{cases}$$

$x(t) = \widetilde{x}(t) + \epsilon u_\epsilon(t)$ invullen in de vergelijking ($\star$) levert (subscript ϵ gemakshalve achterwege latend)

$$\ddot{u} + 4\epsilon \cos^2 t\, \dot{u} + u = -2\cos 2t \,\frac{d\widetilde{x}(t)}{dt} \,.$$

Gebruik makend van de vergelijking voor $\widetilde{x}(t)$ vinden we zodoende

$$\ddot{u} + 4\epsilon \cos^2 t\, \dot{u} + u = \frac{2\,e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \cos 2t \,\sin t \sqrt{1-\epsilon^2} \,.$$

Zetten we $\epsilon = 0$ in linker- en rechterlid van de differentiaalvergelijking voor $u_\epsilon(t)$ in onderdeel **d** dan krijgen we, gebruik makend van het feit dat $\widetilde{x}(t)$ aan de gegeven beginvoorwaarden voldoet (subscript wederom achterwege latend):

$$\begin{cases} \ddot{u} + u = 2\cos 2t \sin t \\ u(0) = 0 \;,\; \dot{u}(0) = 0 \,. \end{cases}$$

☞ **e.** Los het beginwaardenprobleem voor $u_0(t)$ uit onderdeel **d2** op.
(*Hint:* Poneer een particuliere oplossing van het type $u_{\text{part}}(t) = \alpha\, t \cos t + \beta\, t \sin t + \gamma \cos 3t + \delta \sin 3t$ en gebruik de goniometrische identiteit $2\cos\phi \sin\psi = \sin(\phi+\psi) - \sin(\phi-\psi)$.)

De oplossing kan worden verkregen door superpositie van de algemene homogene oplossing (met, zeg, integratieconstanten C en D) en een particuliere oplossing, en deze vervolgens in overeenstemming te brengen met de gegeven beginvoorwaarden. Om een particuliere oplossing te bepalen merken we op dat de inhomogene term geschreven kan worden als $\sin 3t - \sin t$. De hint volgend vinden we $u_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2}\, t \cos t - \frac{1}{8} \sin 3t$, dus

$$u_0(t) = C \cos t + D \sin t + \frac{1}{2}\, t \cos t - \frac{1}{8} \sin 3t \,.$$

Met $u_0(0) = C = 0$ en $\dot{u}_0(0) = 1/2 - 3/8 + D = 0$ levert dit tenslotte de gewenste oplossing:

$$u_0(t) = \frac{1}{2}\, t \cos t - \frac{1}{8} \sin t - \frac{1}{8} \sin 3t$$

4. Een auto-importeur prijst een tweetal varianten van een exclusief automerk in zijn showroom aan, één sedan versie en één cabriolet versie. De bruto winst per sedan bedraagt 225 duizend gulden, die voor een cabriolet 300 duizend gulden. Hij denkt in totaal maximaal 80 auto's te kunnen verkopen. De fabrikant kan binnen de door de importeur gewenste levertijd van 100 dagen slechts een beperkt aantal auto's leveren. Voor het produceren van één sedan heeft hij 1 dag nodig. Een cabriolet is arbeidsintensiever en kost 2 dagen. Verder zijn er 4 arbeidskrachten nodig voor het assembleren van één sedan, en 7 voor de afwerking van één cabriolet. In totaal heeft de fabrikant de beschikking over 280 arbeidskrachten, die zowel voor het maken van sedans als cabriolets inzetbaar zijn.

(5) **a.** Het blijkt dat voor dit luxe type auto vrijwel uitsluitend vraag bestaat naar de sedan versie. Toch wil de importeur ook graag een paar cabriolets in huis hebben. De aantrekkelijk ogende

cabriolet is namelijk interessant als publiekstrekker om potentiële klanten naar de showroom te lokken. De importeur bestelt daarom precies 2 cabriolets, en voor de rest net zoveel sedans als de fabrikant kan leveren tot een totaal van maximaal 80 auto's. Hoeveel sedans kan de importeur binnen de gestelde voorwaarden maximaal inkopen? Hoeveel bruto winst levert hem dit op, ervan uitgaand dat hij alle auto's weet te verkopen?

Dit is een speciaal geval van het lineaire programmeringsprobleem gegeven door het volgende stelsel ongelijkheden:

$$\begin{cases} x+y & \leq & 80 \\ x+2y & \leq & 100 \\ 4x+7y & \leq & 280 \end{cases}$$

en doelfunctie $M=1000\cdot(225x+300y)$ (gulden), namelijk met $y=2$ vast gekozen. De oplossing is onmiddellijk af te lezen: $x=\mathrm{entier}(\min\{78,96,133/2\})=66$. De bruto winst hierbij is $M(66,2)=15,45$ miljoen gulden.

(10) **b.** Los het volgende vraagstuk *grafisch* op: Indien de importeur zou streven naar maximale bruto winst, hoeveel sedans en cabriolets had hij dan moeten inkopen? En wat zou dan zijn bruto winst geweest zijn?

Nu moeten we het algemenere probleem oplossen voor $(x,y)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$. De polytoop gedefiniëerd middels bovenstaande ongelijkheden is een driehoek met hoekpunten $(x,y)=(0,0),(0,40),(70,0)$. De doelfunctie is een lineaire vorm welke zijn maximum aanneemt in het hoekpunt $(x,y)=(70,0)$, en wel $M(70,0)=15,75$ miljoen gulden.

(10) **c.** Idem als onderdeel **b**, maar nu gebruik makend van de *simplexmethode*.

Voer slack variabelen $u,v,w\geq 0$ in om het probleem in standaard gedaante te brengen:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 280 \\ \hline 225 & 300 & 0 & 0 & 0 & M\,(\text{duizend}) \end{array}$$

Een aanvaardbare basisoplossing is onmiddellijk hieruit af te lezen: $x_B=(0,0,80,100,280)$ bij basis $B=\{3,4,5\}$. De bruto winst hierbij is echter minimaal: $M(x_B)=0$. Door $x\uparrow 80,100,70$ te verhogen nemen de slack variabelen $u,v,w\downarrow 0$ respectievelijk af tot nul. Ruil dus basis B in voor $B'=\{1,3,4\}$ en gebruik de derde rij om te vegen zodanig dat ten opzichte van de nieuwe basis B' de eerste kolom dezelfde vorm krijgt als bovenstaande vijfde kolom ten opzichte van de huidige basis B:

$$\begin{array}{ccccc|l} 0 & -3/4 & 1 & 0 & -1/4 & 10 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 & -1/4 & 30 \\ 1 & 7/4 & 0 & 0 & 1/4 & 70 \\ \hline 0 & -1575/4 & 0 & 0 & -225/4 & M-15\,750\,(\text{duizend}) \end{array}$$

Een aanvaardbare basisoplossing is $x_{B'}=(70,0,10,30,0)$ en hiervoor is de bruto winst maximaal, namelijk $M(x_{B'})=15,75$ miljoen gulden. De importeur had dus 70 sedans en geen enkele cabriolet moeten inkopen indien hij de bruto winst had willen maximaliseren.

EINDE