Tentamen modellen en simulatie 18 april 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Alex Boer of Bas Janssens).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Diktaat en aantekeningen mogen gebruikt worden, grafische rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Beschouw de functie

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & \frac{\mu x(1-x)}{1+x} \end{array}$$

waarbij μ een parameter is die voldoet aan $\mu > 0$.

(i) Bereken voor willekeurige $\mu > 0$ het maximum van f op $[0,1]$. Hoe groot mag μ hoogstens zijn om $f(x) \in [0,1]$ te waarborgen?

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich volgens de recursie

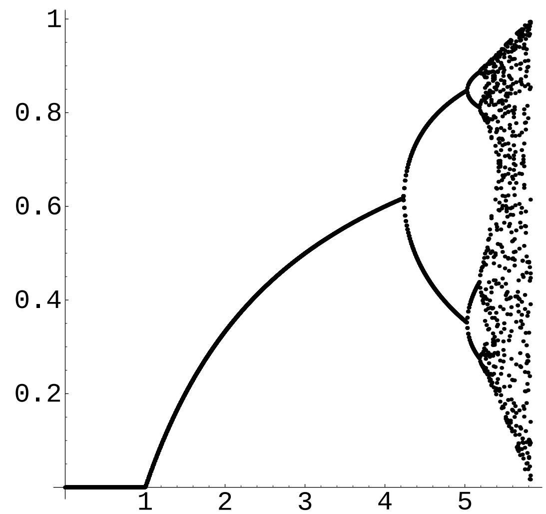
$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{voor alle } n \geq 0.$$

Hierbij staat x_n voor de (geschaalde) populatiegrootte op dag n.

(ii) Bepaal voor willekeurige $\mu > 0$ de dekpunten van deze recursie. Merk op dat alleen oplossingen in $[0,1]$ zinvol zijn. Voor welke waarden is dat het geval?

(iii) Ga voor elk van de dekpunten (uit onderdeel (ii)) na voor welke waarden van $\mu > 0$ dit dekpunt stabiel is.

(iv) In de volgende schets van een bifurcatiediagram voor deze klasse van recursierelaties (bij een willekeurige maar vaste waarde van $x_0 = 0.2$) is het lange-termijngedrag van de oplossing x_n getekend als functie van μ. Laat in korte bewoordingen zien hoe je het antwoord op het vorige onderdeel kunt controleren aan de hand van de waarden van dit bifurcatiediagram in $\mu = 0.5$, $\mu = 1.5$, $\mu = 3.5$ en $\mu = 4.5$.



2. In deze opgave bestuderen we een populatie muizen en katten. Zij x_n resp. y_n het aantal muizen resp. katten bij aanvang van het n-de jaar. Omdat de katten op muizen jagen, heeft de aanwezigheid van katten een remmende invloed op de muizenpopulatiegroei, terwijl omgekeerd de aanwezigheid van muizen een stimulerende invloed heeft op de kattenpopulatiegroei. We modelleren de (geschaalde) populatiegrootten met behulp van de volgende recursie, waarbij $a \geq 0$ een vaste parameter is.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 + a - x_n - y_n)\, x_n \\ y_{n+1} &= (1 + x_n - y_n)\, y_n \quad . \end{aligned}$$

(i) Bepaal de dekpunten van deze recursie.

(ii) Bereken de Jacobi matrix van de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + a - x - y)x \\ (1 + x - y)y \end{pmatrix}$$

in het dekpunt $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$.

(iii) Bepaal de eigenwaarden λ_1, λ_2 van de in het vorige onderdeel gevonden Jacobi matrix.

(iv) Laat zien dat $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \frac{1}{2}a(a-2)+1$.

(v) Bepaal de waarden van $a \geq 0$ waarvoor het evenwichtspunt $\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ stabiel is.

3. Beschouw het autonome stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= -xy \\ y' &= x^2 + y^2 - 4\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

met $\alpha > 0$.

(i) Bereken de evenwichtspunten van (1).

(ii) Bereken de Jacobiaan $Df \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, waarbij

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 + y^2 - 4\alpha \end{pmatrix}.$$

(iii) Bepaal het karakter ((in)stabiel knoop-/spiraalpunt; zadelpunt; centrumpunt) van elk van de in onderdeel (i) gevonden evenwichtspunten.

(iv) Hoe verandert de situatie als we $\alpha < 0$ nemen?

4. Bij het steen-papier-schaar spel wint

- papier van steen (namelijk de steen wordt ingewikkeld)
- schaar van papier
- steen van schaar.

Twee spelers zetten in elke ronde elk 60 euro in en maken vervolgens een keuze uit de mogelijkheden steen, papier en schaar (ze doen dit tegelijkertijd en zonder elkaar te kunnen zien of horen). Indien hun keuzes overeenstemmen krijgt ieder zijn/haar inleg terug, maar anders gaat de totale inleg naar de winnaar die volgens bovenstaande regels wordt bepaald.

(i) Laat zien dat $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ de optimale strategie is.

We breiden het spel uit door een put bij de mogelijke keuzes toe te voegen; de bovenstaande regels blijven van kracht en bovendien wint

- papier van put (namelijk de put wordt afgedekt)
- put van schaar
- put van steen.

(*ii*) Wat is nu de optimale strategie? Hoeveel zal men daarmee gemiddeld van een speler winnen die de strategie $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ hanteert?