

Mechanica 2 (NS-350b)

25 juni 2009

Opgave 1. Vallen op de evenaar

Een massa m valt op de evenaar van een toren met hoogte h . Door de draaiing van de aarde is er de Corioliskracht waardoor de massa niet verticaal omlaag valt maar een afwijking krijgt in horizontale richting. Deze afwijking berekenen we met de volgende benaderingen: de afwijking van de verticale val is gering, de Corioliskracht staat steeds in de horizontale richting, we verwaarlozen de centrifugaalkracht. Noem de verticale richting z en de horizontale richting x . De hoeksnelheid van de aarde is ω , de valversnelling g . De beginsnelheid is nul.

- Geef de bewegingsvergelijkingen in de z en de x -richting.
- Bereken de afstand x_0 tot de toren bij het neerkomen op de grond.
- Iemand zegt: terwijl de massa valt draait de aarde van west naar oost, dus de massa krijgt een afwijking in westelijke richting. Geef aan wat fout is aan deze redenering.

Opgave 2. Zonnestelsel met stof

Een uniforme verdeling van stof in het zonnestelsel voegt een extra kracht toe aan de gravitatiekracht tussen de zon en een planeet. Deze kracht, werkend op de planeet, kan geschreven worden als $F = -mCr$, waarin m de massa van de planeet is, C een constante die evenredig is met de gravitatieconstante en de dichtheid van het stof en r is de afstand tussen de zon en de planeet. De kracht is zeer klein ten opzichte van de gravitatiekracht $F_g = \frac{GmM}{r^3} \vec{r}$. Neem aan dat $M \gg m$.

- Bereken de periode van een cirkelbaan met straal r_0 van de planeet in dit gecombineerde krachtveld voor kleine waarden van C . (Antwoord: $T_1 = \alpha(1 - C\beta)$ met α en β te berekenen constanten)
- We verstoren de (stabiele) cirkelbaan waardoor oscillaties ontstaan. Bereken nu de periode T_2 van kleine trillingen vanuit deze cirkelbaan. De effectieve potentiaal kan hierbij nuttig zijn. Gebruik voor het impulsmoment de waarde in de cirkelbaan.
- Uit de twee eerste onderdelen blijkt dat de perioden T_1 en T_2 verschillen voor eindige waarden van C . Het gevolg is dat de verstoorde baan, in goede benadering een ellips, gaat precederen. Bereken de precessiefrequentie.

Opgave 3. Vrije precessie

We beschouwen de Eulervergelijkingen (zie formuleblad) voor een axiaal symmetrisch voorwerp (schijf, cylinder) waarop geen extern moment werkt. Het traagheidsmoment t.o.v. de axiale symmetrieas is λ_3 en het traagheidsmoment t.o.v. elke as loodrecht op deze symmetrieas is gelijk aan λ_1 . De beginconditie is dat het voorwerp roteert met hoeksnelheid ω . De component van ω langs de axiale is ω_3 en de component daar loodrecht op ω_1 .

- Welke grootte is behouden in grootte en richting in het inertiaalstelsel.
- Laat zien dat het coördinatenstelsel behorende bij een set van hoofdassen van het voorwerp de vector ω gaat precederen om de axiale symmetrie-as met een frequentie $\Omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_3$. Veronderstel dat de aarde een perfecte homogene bol is die met de bekende hoeksnelheid van een omwenteling per dag ronddraait om de noordzuid as. Veronderstel verder dat op een geveve

nmoment op 30 graden noorderbreedte een berg toegevoegd wordt met een massa van 10^{-8} van de massa van de aarde. De hoeksnelheid van de aarde zal hierdoor gaan precederen om de nieuwe symmetrie-as.

- c) Hoelang duurt het voordat de noordpool weer op zijn oorspronkelijke plaats is? Noem de straal van de aarde R , de berg mag als een puntmassa beschouwd worden. Maak ook een numerieke schatting.