DEPARTEMENT NATUUR- EN STERRENKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE TBC VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE NS-350B WERD IN 2008/2009 GEGEVEN DOOR TOINE ARTS.

Uitwerking[1] Mechanica 2 (NS-350b)
25 juni 2009

Opgave 1. Vallen op de evenaar

(33 punten)

a) Geef de bewegingsvergelijkingen in de z en de x-richting. $z: -mg = m\ddot{z} : x$: Corioliskracht $F = -2m\omega\dot{z} = m\ddot{x}$, de kracht is naar het oosten gericht.

b) Bereken de afstand x_0 tot de toren bij het neerkomen op de grond. Uit de eerste vergelijking volgt $\dot{z} = -gt$, invullen in de tweede vergelijking en oplossen met randvoorwaarden: $y(t) = \frac{1}{3}\omega g t^3$. De valtijd is $t_{val} = \sqrt{2h/g}$, invullen $x_0 = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{2h/g}$.

c) Iemand zegt: terwijl de massa valt draait de aarde van west naar oost, dus de de massa krijgt een afwijking in westelijke richting. Geef aan wat fout is aan deze redenering.

De persoon redeneert vanuit een inertiaalstelsel. Echter in dit stelsel is de snelheid van de massa op de top van de toren ($\omega(R+h)$) groter dan de snelheid van de grond (ωR). De massa komt dus vóór de toren op de grond (in oostelijke richting).

Opgave 2. Zonnestelsel met stof

(33 punten)

a) Bereken de periode van een cirkelbaan met straal r_0 van de planeet in dit gecombineerde krachtveld voor kleine waarden van C.

In cirkelbaan geldt ($F = ma$): $mCr_0 + GmM/r^2 = mv^2/r_0$, ook geldt voor de omlooptijd $T_1 = 2\pi r_O/v$, v elimineren: $T_1^2 = \frac{4\pi^2 r_0}{Cr_0 + GM/r_0^2} \approx \frac{4\pi^2 r_0^3}{MG}(1 - \frac{Cr_0^3}{MG})$. Dus $T_1 = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{MG}}(1 - C\frac{r_0^3}{2MG})$.

b) We verstoren de (stabiele) cirkelbaan waardoor oscillaties ontstaan. Bereken nu de periode T_2 van kleine trillingen vanuit deze cirkelbaan. De effectieve potentiaal kan hierbij nuttig zijn. Gebruik voor het impulsmoment de waarde in de cirkelbaan.

De effectieve potentiaal is de potentiaal van de krachten plus de centrifugale potentiaal: $U_{eff} = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2}mCr^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$, met l het impulsmoment. In de cirkelbaan zitten we in het minimum van deze potentiaal. Voor kleine uitwijkingen is deze parabolisch. De effectieve veerconstante van de trilling is de tweede afgeleide van deze functie in $r = r_0$ (Taylorontwikkeling). $U''_{eff}(r = r_0) = -2\frac{GmM}{r_0^3} + mC + \frac{3l^2}{mr_0^4}$. Verder geldt $l^2 = (mvr_0)^2 = m^2Cr_0^4 + GMm^2r_0$. De nieuwe omlooptijd is $T_2 = 2\pi\sqrt{m/U''_{eff}(r = r_0)} = \sqrt{1/(\frac{GM}{r_0^3} + 4C)} \approx 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{MG}}(1 - 2C\frac{r_0^3}{MG})$.

c) Uit de twee eerste onderdelen blijkt dat de perioden T_1 en T_2 verschillen voor eindige waarden van C. Het gevolg is dat de verstoorde baan, in goede benadering een ellips, gaat precederen. Bereken de precessiefrequentie.

We zien dat $T_2 < T_1$. De omlooptijd van de ellips loopt dus achter bij de omlooptijd van de cirkel. De ellips precedeert dus t.o.v. de cirkelbaan, de verschilfrequentie is $f_{precessie} = (1/T_2 - 1/T_1) = \frac{3}{2}C\frac{r_0^3}{MG}$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Opgave 3. Vrije precessie

(33 punten)

a) Welke grootheid is behouden in grootte en richting in het inertiaalstelsel.

Het impulsmoment, er zijn geen uitwendige momenten. (Impuls hoeft niet behouden te zijn)

b) Laat zien dat in het coördinatenstelsel behorende bij een set van hoofdassen van het voorwerp de vector ω gaat precederen om de axiale symmetrie-as met een frequentie $\Omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}\omega_3$

afleiding zie boek p.399

c) Hoe lang duurt het voordat de noordpool weer op zijn oorspronkelijke plaats is? Noem de straal van de aarde R, de berg mag als een puntmassa beschouwd worden. Maak ook een numerieke schatting.

De hoofdtraagheidsmomenten zijn nu $\lambda_3 = \frac{2}{5}MR^2$, $\lambda_1 = \frac{2}{5}MR^2 + 10^{-8}MR^2$. Hieruit volgt $\Omega \approx 10^{-8}\omega \cos \pi/3 = \frac{1}{2}10^{-8}\omega$. Voor een omwenteling is de tijd $2 \cdot 10^8/(2\pi)$ dagen, dit is ongeveer 10^5 jaar.