NS-350b

Tussentoets Mechanica2
donderdag 22 april 2010

Opgave 1: Algemene vragen (20 punten)

a) Kinematica: Als gegeven is dat de grootte van de snelheidsvector $\vec{v}(t)$ constant is in de tijd, bewijs dan dat $\dot{\vec{v}}$ loodrecht staat op $\vec{v}(t)$.

b) Hoe luidt het principe van Hamilton.

c) Geef in woorden de stelling van Noether.

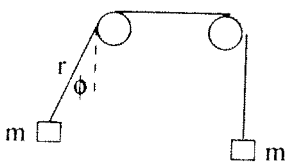
d) Bij een holonome constraint is er een eenduidige relatie tussen de coördinaten b.v. $f(x, y, z) = c$. In deze vergelijking komen geen snelheden voor. Bij een wiel met straal R dat slipvrij rolt is er een relatie tussen de hoeksnelheid ω van het wiel en de translatiesnelheid v van het wiel, $v = \omega R$. Waarom is dit in het algemeen geen holonome constraint?

Opgave 2: Circulair weersysteem (20 punten)
Stel een circulair weersysteem heeft een windsnelheidsveld $\mathbf{v}(r) = \frac{A}{r}\hat{\theta}$, hierin is r de afstand tot het centrum en is $\hat{\theta}$ de azimutaal (tangentieel) gerichte eenheidsvector. Een voorwerp geplaatst in dit veld ondervindt een kracht $\mathbf{F}(r) = -B\mathbf{v}$, waarin B een constante is.

1. Laat zien dat de kringintegraal van de kracht langs een gesloten contour die de oorsprong niet omsluit gelijk is aan nul. (U mag een contour kiezen bestaande uit twee cirkelbogen verbonden door twee voerstralen, een deel van een taartpunt)

2. Bereken ook de kringintegraal van de kracht langs een contour die de oorsprong wel omsluit, bijvoorbeeld een cirkel. Hangt het resultaat af van de gekozen gesloten contour om de oorsprong? Is het krachtveld conservatief?

Opgave 3: Slinger aan een katrol (30 punten)
Een touw loopt over twee katrollen, zie figuur. Aan elk uiteinde is een massa m bevestigd. Aan de kant van de linkerkatrol laten we de massa m in een horizontaal vlak slingeren met een *kleine* maximale uitwijking. De massa aan de rechterkatrol kan alleen in vertikale richting bewegen. De versnelling van de zwaartekracht is g, touw en katrollen zijn massaloos en katrollen kunnen als puntvormig beschouwd worden.



a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem. Geef de Lagrangiaan.

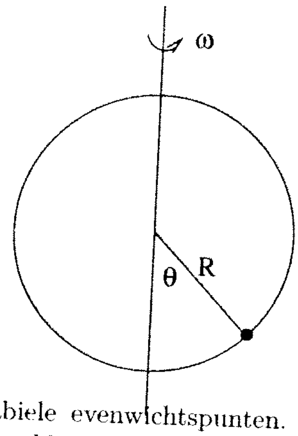
b) Geef de bewegingsvergelijkingen en los deze op in de grove benadering dat alle kwadratische termen in ϕ en $\dot{\phi}$ (ook mengtermen) verwaarloosd mogen worden. De beginconditie is $\dot{r} = 0$ en $\phi = \phi_0$.

c) We gaan een stapje verder en nemen ook de kwadratische termen mee. Neem wel aan dat gedurende een slingering de lengte r slechts weinig verandert. Los de bewegingsvergelijking voor de hoek ϕ op met de conditie $\dot{r} \approx 0$ en laat vervolgens zien dat gemiddeld over een periode de rechter massa omhoog gaat met een kleine snelheid $\dot{r} = \alpha\phi_0^2 g$. Geef de constante α.

d) Geef aan de hand van de wetten van Newton in woorden een verklaring voor het langzaam stijgen van de rechter massa.

Opgave 4: Kraal op roterende ring (30 punten)

Een kraal met massa m kan wrijvingsloos bewegen over een ring met straal R. De ring draait met een constante hoeksnelheid ω om een verticale as. Op de massa werkt ook de zwaartekracht met versnelling g.



a) Geef de Lagrangiaan en leid hieruit af bewegingsvergelijking voor de getekende hoek θ.

b) Voor welke hoeken θ_0 is de massa in stabiel evenwicht, maak onderscheid tussen de situaties $\omega^2 < g/R$ en $\omega^2 > g/R$. Een intuitief antwoord volstaat hier, bij onderdeel c moet het wel aangetoond worden.

c) Bereken de frequenties van een kleine trilling om de stabiele evenwichtspunten. (Noem de hoek $\theta_0 + \phi$ en gebruik de Taylorontwikkeling voor kleine ϕ.)

FORMULEBLAD MECHANICA 2

Kinematica van één deeltje.
Ontbinding van snelheid en versnelling in vlakke poolcoördinaten: $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, en $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$.

Dynamica van één deeltje.
Newton: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.
impulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, krachtmoment: $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\tau = \dot{\mathbf{L}}$.

Arbeid en Energie.
$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U_p(b) - U_p(a))$ voor een conservatief krachtveld, d.w.z. als $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. $\mathbf{F} = -\text{grad}E_p$; Behoud van mechanische energie: $U + T = C$. Is een kracht conservatief dan rot $\mathbf{F}$=0, oftewel $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$ etc. Vermogen: $P = \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Evenwicht: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes.
Massamiddelpunt $\mathbf{r}_m = \frac{1}{M}\sum_i m_i\mathbf{r}_i$; $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_m$; $\dot{\mathbf{P}} = M\mathbf{a}_m = \mathbf{F}_{ext}$; Voor twee deeltjes: $\mathbf{F}_{12} = \mu\mathbf{a}_{12}$, waarin $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. $\dot{\mathbf{L}} = \tau_{ext}$; $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{r}_m \times \mathbf{P}$; $\dot{\mathbf{L}}_m = \tau_z$. Voor twee deeltjes: $T_m = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$.

Euler-Lagrangevergelijkingen Lagrangiaan:$L = T - U$; Lagrange $\partial L/\partial q_i = d/dt\partial L/\partial\dot{q}_i$, $[i = 1, \cdots, n]$. Gegeneraliseerde impuls: $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$. Voor cyclische (ignorable) coördinaten is de corresponderende gegeneraliseerde impuls behouden. Hamiltoniaan: $H = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i - L$.

Gravitatiewet:
$F = GmM/r^2$, potentiële energie, $U = -GmM/r$. Kepler 1: Banen in centraal krachtveld zijn kegelsneden, $r = \epsilon d/(1 + \epsilon\cos\phi)$. Kepler 2: $mr^2\dot{\phi} = L =$ constant. Totale energie: $E = -GmM/r + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + L^2/2mr^2$. Centrifugale potentiële energie: $L^2/2mr^2$. Voor ellipsbaan $(a = \epsilon d/(1 - \epsilon^2))$: $E = -GmM/2a$ en $\epsilon^2 = 1 + (2E/m)(L/GmM)^2$. Kepler 3: $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$.

Niet-inertiaalstelsels.
$\mathbf{F} + \mathbf{F_s} = m\mathbf{a}'$ met $\mathbf{F_s} = -m\mathbf{a}_0$ in een stelsel dat met versnelling $\mathbf{a}_0$ beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel. $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{cor} + \mathbf{F}_{cf} = m\mathbf{a}'$, met $\mathbf{F}_{cor} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$, en $\mathbf{F}_{cf} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ in een stelsel dat met hoeksnelheid ω roteert t.o.v. een inertiaalstelsel.

Eulervergelijkingen
$\lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1$,
$\lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_3\omega_1 = \tau_2$,
$\lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 = \tau_3$.

Traagheidstensor:
$\mathbf{I}$, $I_{xx} = \sum_\alpha m_\alpha(y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$, enz. en $I_{xy} = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha$, enz.

Taylorontwikkeling:
$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x)\epsilon^2$.

Cosinusregel in driehoek :
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.