Uitwerking tussentoets Mechanica2
donderdag 22 april 2010

Opgave 1: Algemene vragen (20 punten)

a) Bewijs: De grootte van de snelheid in het kwadraat is gelijk aan het inprodukt van de snelheidsvector met zichzelf. Dit kunnen we differentieren naar de tijd $\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = 0$, hieruit volgt dat de snelheid en versnelling loodrecht op elkaar staan.

b) Hoe luidt het principe van Hamilton. Taylor p. 239

c) Geef in woorden de stelling van Noether. Taylor p. 266-267

d) Bij een holonome constraint is er een eenduidige relatie tussen de coördinaten b.v. $f(x, y, z) = c$. In deze vergelijking komen geen snelheden voor. Bij een wiel met straal R dat slipvrij rolt is er een relatie tussen de hoeksnelheid ω van het wiel en de translatiesnelheid v van het wiel, $v = \omega R$. Waarom is dit in het algemeen geen holonome constraint? Taylor p. 249/250

Opgave 2: Circulair weersysteem (20 punten)
Stel een circulair weersysteem heeft een windsnelheidsveld $\mathbf{v}(r) = \frac{A}{r}\hat{\theta}$, hierin is r de afstand tot het centrum en is $\hat{\theta}$ de azimutaal (tangentieel) gerichte eenheidsvector. Een voorwerp geplaatst in dit veld ondervindt een kracht $\mathbf{F}(r) = -B\mathbf{v}$, waarin B een constante is.

1. Als het pad langs een voerstraal loopt dan staat de kracht loodrecht op de weg en is er geen arbeid. We houden alleen de bogen over, hier staat de kracht altijd evenwijdig aan de weg. De lengte van de bogen zijn evenredig met r, dus de arbeid verricht door deze kracht is onfhankelijk van de booglengte. Lopen we rond dan is de netto arbeid nul. (Elk willekeurig pad kan opgebouwd worden door stukjes voerstraal en boogjes).

2. Voor een cirkel met straal R, doorlopen met de klok mee is de verrichte arbeid gelijk aan $W = 2\pi AB$, onafhankelijk van R. Een willekeurig pad om de oorsprong kan altijd opgebouwd worden uit bogen van cirkels en voerstralen, het resultaat is dus altijd $2\pi AB$. Het veld is niet conservatief, de antwoorden bij 1 en 2 zijn verschillend.

Opgave 3: Slinger aan een katrol (30 punten)
Een touw loopt over twee katrollen, zie figuur. Aan elk uiteinde is een massa m bevestigd. Aan de kant van de linkerkatrol laten we de massa m in een horizontaal vlak slingeren met een *kleine* maximale uitwijking. De massa aan de rechterkatrol kan alleen in verticale richting bewegen. De versnelling van de zwaartekracht is g, touw en katrollen zijn massaloos en katrollen kunnen als puntvormig beschouwd worden.

a) Er zijn twee vrijheidsgraden (r en ϕ). $\mathcal{L} = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + mg(l - r) + mgr\cos\phi$. Als nulpunt van de pot. energie heb ik de hoogte van de katrollen genomen, l is de lengte van het koord (dit kan ook anders).

b) Voor kleine hoeken kunnen we benaderen $\cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2$. De twee bewegingsvgln worden: $\ddot{r} = \frac{1}{2}r\dot{\phi}^2 - \frac{1}{4}g\phi^2$ en $r^2\ddot{\phi} + r\dot{r}\dot{\phi} = -gr\phi$. Verwaarlozen van de kwadratische termen geeft $\ddot{r} = 0$, waaruit volgt met de beginvoorwaarde dat r = constant is. Verder $\ddot{\phi} + g\phi/r = 0$, waaruit volgt $\phi(t) = \phi_0\cos(\omega t)$ met $\omega = \sqrt{g/r}$.

c) Indien $\dot{r} \approx 0$ dan blijft de bewegingsvergelijking voor ϕ hetzelfde als bij onderdeel b. Het resultaat substitueren we in de vergelijking voor r: $\ddot{r} = \frac{1}{2}g\phi_0^2 \sin^2 \omega t - \frac{1}{4}g\phi_0^2 \cos^2 \omega t$. Het gemiddelde van $\cos^2$ en $\sin^2$ over een periode van de slinger is 1/2, we vinden $\ddot{r} = \frac{1}{8}\phi_0^2 g$. Dit is positief dus de rechter massa gaat omhoog.

d) In termen van Newton: De massa die slingert beweegt in een deel van een cirkel en ondervindt dus een versnelling naar binnen. De versnelling wordt geleverd door het verschil tussen de spankracht in het koord en de zwaartekracht. De spankracht is dus groter dan de zwaartekracht. Omdat de spankracht in het koord overal even groot is (massaloos!) moet de rechter massa wel omhoog gaan.

Opgave 4: Kraal op roterende ring (30 punten)
Een kraal met massa m kan wrijvingsloos bewegen over een ring met straal R. De ring draait met een constante hoeksnelheid ω rond een verticale as. Op de massa werkt ook de zwaartekracht.

a) De snelheid van de ring heeft twee loodrecht op elkaar staande componenten: $T = \frac{1}{2}m(\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2)$. De potentiele energie is gelijk aan $U = mgR\cos\theta$. $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\omega^2 R^2 \sin^2 \theta + R^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta)$. Bewegingsvergelijking (Euler-Lagrange): $R\ddot{\theta} = (\omega^2 R\cos\theta - g)\sin\theta$

b+c) In evenwicht geldt $\ddot{\theta} = 0$, dus of $\sin\theta = 0$, met $\theta = 0$ of $\theta = \pi$, of $\cos\theta = g/(\omega^2 R)$, maar dit kan alleen als $\omega^2 \geq g/R$. Er zijn dus twee situaties:

1. $\omega^2 < g/R$. In dit geval is $\theta = \pi$ labiel. Intuitief lijkt dit vanzelfsprekend, door de zwaartekracht valt de kraal omlaag. We kunnen ook ontwikkelen rond $\theta = \pi$ door $\theta = \pi + \epsilon$ in te vullen en Taylor toe te passen op de cosinus en de sinusfunctie, $\ddot{\epsilon} - \epsilon(\omega^2 + g/R) = 0$. De oplossing hiervan is een exponentiele groei van ϵ. In het geval dat $\theta = 0$ krijgen we voor kleine hoeken: $\ddot{\theta} + \theta(-\omega^2 + g/R) = 0$. Dit is een trilling met frequentie $\sqrt{g/R - \omega^2}$

2. $\omega^2 \geq g/R$. Nu zijn zowel de posities $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ instabiel. Voor $\theta = 0$ draait het teken in de bewegingsvergelijking (zie boven) om en we krijgen een exponentiele toename. In het geval dat $\cos\theta_0 = g/(\omega^2 R)$ substitueren we weer $\theta = \theta_0 + \epsilon$ en vinden met Taylor $\ddot{\epsilon} + (\omega^2 \sin^2 \theta_0)\epsilon = 0$, een trilling met frequentie $\omega \sin\theta_0 = \sqrt{\omega^2 - g^2/\omega^2 R^2}$.