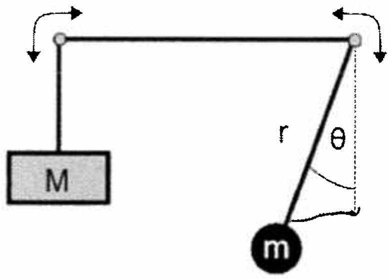
Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 30 juni 2011

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!
Gebruik per opgave een apart vel!
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

1 Slinger van Atwood

Figuur 1 toont een slinger van Atwood. Twee massa's zijn met elkaar verbonden door een massaloos touw van vaste lengte dat wrijvingsloos over twee ophangpunten kan glijden. De eerste massa M kan alleen verticaal bewegen, terwijl de tweede massa m zowel verticaal als horizontaal kan bewegen. [totaal: 15 pt] -5



Figuur 1: Slinger van Atwood

(a) Geef de potentiële energie U en de kinetische energie K van het systeem. [3 pt]

(b) Bereken de gegeneraliseerde impulsen p_θ en p_r. [2 pt]

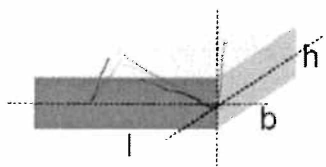
(c) Gebruik de gegeneraliseerde impulsen van onderdeel (b) om de snelheden $\dot{\theta}$ en $\dot{r}$ uit te drukken als functie van de gegeneraliseerde impulsen; gebruik die uitdrukkingen om de Hamiltoniaan $\mathscr{H}(r, \theta, p_r, p\theta)$ op te schrijven. [4 pt]

(d) Gebruik Hamiltons formalisme om de bewegingsvergelijkingen voor r en θ op te stellen. Je hoeft de differentiaalvergelijkingen niet op te lossen. [4 pt]

(e) De bij onderdeel (d) opgestelde bewegingsvergelijkingen zijn in het algemeen niet oplosbaar. Geef aan waarom dat zo is. [2 pt]

2 Tuimelend Blok 17

We beschouwen de rotatiebeweging van een rechthoekig blok met massa M met homogene massaverdeling (dichtheid ρ) en met afmetingen $h < b < l$ (zie figuur 2). [totaal: 25 pt] -7



Figuur 2: Rechthoekig blok met homogene massaverdeling.

(a) Bereken het traagheidsmoment I van dit blok ten opzichte van een as loodrecht op het lb-vlak, langs een van de randen van het blok. Reken, voor de keuze van twee andere assen, zoals in de tekening aangegeven, de drie traagheids*producten* (let op: *niet* de momenten!) uit. [4 pt]

(b) Rondom welke van de aangegeven assen kan het blok alleen draaien als er een krachtmoment wordt uitgeoefend (dus niet vrij roteren)? [3 pt]

We concentreren ons nu op vrije rotaties van het blok (geen krachtmomenten), die we beschrijven met behulp van de hoofdtraagheidsmomenten $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(c) Door welke oorsprong gaan de assen met het kleinste traagheidsmoment? In welke richtingen ten opzichte van het blok staan de drie hoofdassen? [2 pt]

(d) Stel de Eulervergelijkingen op. [3 pt]

Voor een symmetrisch object met $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ hebben we gezien dat de rotatievector $\vec{\omega}$ beschreven kan worden als een constante component ω_3 langs de lichaamsas (richting $\hat{e}_3$) en een component met constante grootte, loodrecht op de lichaamsas, die met een vaste hoeksnelheid om de lichaamsas draait. Voor het blok, met $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, testen we nu of we vergelijkbaar gedrag mogen verwachten. Hiertoe gaan we uit van een rotatievector die vrijwel precies langs een van de 3 hoofdassen ligt, en beschouwen het effect van een kleine component loodrecht op de hoofdas.

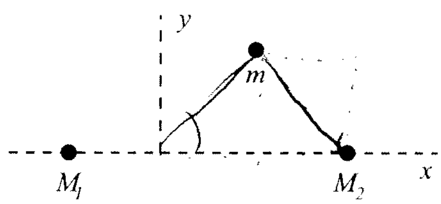
(e) Ga uit van een rotatie vrijwel precies rond richting $\hat{e}_3$, zodat $\omega_3 \gg \omega_2, \omega_1$. Neem aan dat ω_3 constant is. Gebruik deze informatie om de Eulervergelijkingen voor $\dot{\omega}_1$ en $\dot{\omega}_2$ te vereenvoudigen, en los deze twee vergelijkingen op. [5 pt]

(Tip: gebruik voor deze componenten als probeeroplossing $\omega_{1,2}(t) = Ae^{\kappa t}$ en houd bij de oplossing rekening met $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).

(f) Doe hetzelfde als bij (e) voor de twee rotaties vrijwel precies rond richting $\hat{e}_1$ en vrijwel precies rond richting $\hat{e}_2$. [5 pt]

(g) Bespreek de bij (e) en (f) gevonden antwoorden in termen van stabiele en instabiele rotaties. [3 pt]

3 Lagrange-punten



Beschouw een systeem van twee hemellichamen met massa's M_1 en M_2 die om een gezamenlijk massamiddelpunt heen bewegen onder invloed van de zwaartekracht. We beschouwen nu een derde 'testmassa' $m \ll M_1, M_2$ en verwaarlozen de invloed die deze massa heeft op de beweging van de twee hemellichamen.

We beschouwen dit systeem in een meedraaiend stelsel, waarin M_1 en M_2 op de horizontale x-as liggen. De relatie tussen omwentelingssnelheid Ω van lichamen 1 en 2 in het massamiddelpuntssysteem en de afstand R tussen de lichamen volgt de derde wet van Kepler: $\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2)$. [totaal: 20 pt]

(a) Specificeer alle krachten en schijnkrachten die testmassa (m) ondervindt en maak een schets waarin de richtingen van deze krachten zijn aangegeven. [4 pt]

(b) De zgn. Lagrangepunten zijn stationaire punten, waarvoor geldt dat de totale kracht $\vec{F}$ op de testmassa gelijk is aan nul als de snelheid van de testmassa $\vec{v} = 0$ in het meedraaiende systeem. Geef de componenten van $\vec{F}$ voor dit geval ($v = 0$) als functie van de positie (x en y) ten opzichte van het massamiddelpunt. [5 pt]

De eerste drie Lagrangepunten liggen op de x-as ($y = 0$). We gaan nu op zoek naar Lagrangepunten 4 en 5, met $y \neq 0$.

(c) Ontbind de kracht op de testmassa (van vraag (b)) in de componenten loodrecht op en parallel aan de eenheidsvector $\hat{\mathbf{r}}$ in de richting van de lijn die de positie van testmassa ten opzichte van het massamiddelpunt van M_1 en M_2 aangeeft. Laat zien dat de krachtcomponent loodrecht op $\hat{\mathbf{r}}$

$$F_{\perp} = m\alpha\beta y\Omega^2 R^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{1}{((x-R\beta)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x+R\alpha)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

met $\alpha = M_2/(M_1+M_2)$ en $\beta = M_1/(M_1+M_2)$. Wat betekent dit voor de positie van de Lagrangepunten? [4 pt]

(d) Geef nu $F_{\parallel}$ en geef de positie van L_4 en L_5. [5 pt]

De Lagrangepunten liggen over het algemeen op een zadelpunt van de zwaartekrachtspotentiaal. Hierdoor is er geen stabiel evenwicht in de punten: als de massa m zich begint te verplaatsen vanaf het Lagrangepunt, neemt de kracht toe en verwijdert de massa zich alsmaar verder.

(e) Lagrangepunten 4 en 5 zijn toch stabiel. Welke van de in onderdeel (a) genoemde krachten denk je dat er hier kan werken als de 'restoring force'? [2 pt]

8

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$E = \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}{2L^2}(\epsilon^2 - 1) \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int dx \int dy \int dz\ \rho(x,y,z) \left((x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_0} = \dot{Q} + \Omega \times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{Q} + 2\Omega \times \dot{Q} + \Omega \times (\Omega \times Q)$$

$$\mathscr{L} = T - V \qquad \frac{\partial \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\mathscr{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathscr{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}$$

$$\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \qquad \dot{\mathbf{L}} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{\Gamma}$$