1-7-2016

NS-350b

JULIUS INSTITUUT
UNIVERSITEIT UTRECHT

Eindtoets MECHANICA 2

Maak elke opgave op een apart vel. Zet op elk vel uw naam en studentnummer

Opgave 1: Algemene vragen (30 punten)

a) Leg uit met behulp van schijnkrachten waarom er twee getijden op een dag zijn.

b) Via de mail kreeg ik de volgende vraag (geen natuurkundestudent):

Geachte heer, ik begrijp niet waarom bij de gravitatiewet van Newton de baan de ene keer een cirkel is en de andere keer een ellips. Waar hangt nu die excentriciteit ϵ van af? Formuleer een antwoord en houd er rekening mee dat het begrip impulsmoment waarschijnlijk niet bekend is.

c) Als gegeven is dat de normen a^2 en b^2 van twee 4-vectoren a^μ en b^μ Lorentzinvariant zijn, toon dan aan dat het inproduct $b_\mu a^\mu$ invariant is onder Lorentztransformaties.

d) Laat zien door gebruik te maken van de invariante eigenschappen van de viervectoren dat het antiproton $\overline{P}$ niet met een proton P kan combineren tot een foton (hint: nulimpulsstelsel).

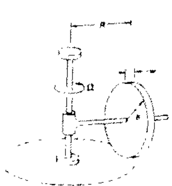
Opgave 2: Traagheidstensor (25 punten)

Beschouw drie gelijke massa's m op de posities (a,0,0), (0,a,2a) en (0,2a,a). De massa's zijn verbonden door staven met verwaarloosbare massa.

a) Bereken de traagheidstensor

b) Bereken de hoofdtraagheidsmomenten en de richtingen van de hoofdassen.

Opgave 3: Graanmolen (25 punten)



In oude graanmolens wordt het graan door een schijfvormige molensteen gemalen. De molensteen draait in een cirkel en wordt aangedreven door een ronddraaiende as. Door de precessie kan de normaalkracht op het oppervlak aanzienlijk groter zijn dan het gewicht van de steen. Neem aan dat de molensteen een zeer dunne uniforme schijf is met massa M, straal b, en dat de steen slipvrij rolt in een cirkel met straal R en hoeksnelheid Ω.

a) Leg in woorden uit waarom de normaalkracht uitgeoefend op de grond groter is dan het gewicht Mg van de steen. (Het antwoord "door de precessie" is onvoldoende, het is wel een aanwijzing).

b) Bereken de normaalkracht van de steen op de grond (Antwoordcontrole: Als $\Omega^2 b = 2g$ dan is de normaalkracht $2mg$.)

Opgave 4: Poolvlucht (20 punten)
Een vliegtuig vliegt met een snelheid v van 900 km/uur over de noordpool en vervolgt zijn koers in zuidelijke richting langs een vaste lengtegraad. In het vliegtuig is een schietlood vrij opgehangen. Schat de hoek tussen het schietlood en de lijn van het ophangpunt van het schietlood tot het centrum van de aarde wanneer het vliegtuig zich bevindt

a) boven de noordpool

b)) boven de evenaar

c) op een hoogte van 45° NB.

Voer de berekening eerst in symbolen uit, vul pas op het laatste moment numerieke waarden in. (R_{aarde}=6400 km, $\omega_a = 7.3 * 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2, verwaarloos de vlieghoogte; maar dit is de enige benadering!)

FORMULEBLAD MECHANICA 2

Kinematica van één deeltje.
Ontbinding van snelheid en versnelling in vlakke poolcoördinaten: $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, en $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$.

Dynamica van één deeltje.
Newton: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.
impulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, krachtmoment: $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\tau = \dot{\mathbf{L}}$.

Arbeid en Energie.
$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U_p(b) - U_p(a))$ voor een conservatief krachtveld, d.w.z. als $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. $\mathbf{F} = -\text{grad}E_p$; Behoud van mechanische energie: $U + T = C$. Is een kracht conservatief dan rot $\mathbf{F}$=0, oftewel $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$ etc. Vermogen: $P = \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Evenwicht: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes.
Massamiddelpunt $\mathbf{r}_m = \frac{1}{M}\sum_i m_i\mathbf{r}_i$; $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_m$; $\dot{\mathbf{P}} = M\mathbf{a}_m = \mathbf{F}_{ext}$; Voor twee deeltjes: $\mathbf{F}_{12} = \mu\mathbf{a}_{12}$, waarin $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. $\dot{\mathbf{L}} = \tau_{ext}$; $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{r}_m \times \mathbf{P}$; $\dot{\mathbf{L}}_m = \tau_z$. Voor twee deeltjes: $T_m = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$.

Euler-Lagrangevergelijkingen Lagrangiaan:$L = T - U$; Lagrange $\partial L/\partial q_i = d/dt\partial L/\partial\dot{q}_i$, $[i = 1, \cdots, n]$. Gegeneraliseerde impuls: $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$. Voor cyclische (ignorable) coördinaten is de corresponderende gegeneraliseerde impuls behouden. Hamiltoniaan: $H = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i - L$.

Gravitatiewet:
$F = GmM/r^2$, potentiële energie, $U = -GmM/r$. Kepler 1: Banen in centraal krachtveld zijn kegelsneden, $r = \epsilon d/(1 + \epsilon\cos\phi)$. Kepler 2: $mr^2\dot{\phi} = L =$ constant. Totale energie: $E = -GmM/r + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + L^2/2mr^2$. Centrifugale potentiële energie: $L^2/2mr^2$. Voor ellipsbaan ($a = \epsilon d/(1 - \epsilon^2)$): $E = -GmM/2a$ en $\epsilon^2 = 1 + (2E/m)(L/GmM)^2$. Kepler 3: $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$.

Niet-inertiaalstelsels.
$\mathbf{F} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{a}'$ met $\mathbf{F}_s = -m\mathbf{a}_0$ in een stelsel dat met versnelling $\mathbf{a}_0$ beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel. $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{cor} + \mathbf{F}_{cf} = m\mathbf{a}'$, met $\mathbf{F}_{cor} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$, en $\mathbf{F}_{cf} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ in een stelsel dat met hoeksnelheid ω roteert t.o.v. een inertiaalstelsel.

Eulervergelijkingen
$\lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1$,
$\lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_3\omega_1 = \tau_2$,
$\lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 = \tau_3$.

Traagheidstensor:
$\mathbf{I}$, $I_{xx} = \sum_\alpha m_\alpha(y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$. enz. en $I_{xy} = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha$, enz.

Invariante massa: $E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2$ en $\vec{p}c = \beta E$.

Taylorontwikkeling:
$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x)\epsilon^2$.

Cosinusregel in driehoek :
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.