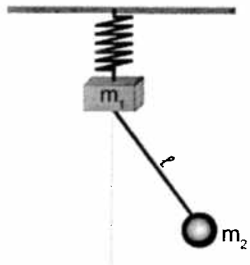
Tentamen Mechanica 2

NS-350B, Blok 3, 19 April 2012

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**.
Gebruik per opgave een **apart vel**.
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag.

1 Verend opgehangen slinger



Aan het plafond hangt een massa m_1 aan een ideale veer (veerconstante k) die alleen in de vertikale richting kan bewegen. Aan m_1 is een slinger bevestigd met daaraan een massa m_2 (zie afbeelding hiernaast). [Totaal: 17 pt]

(a) Hoe groot is het minimale aantal coördinaten waarmee je de beweging van de twee massa's volledig kunt beschrijven? Welke gegeneraliseerde coördinaten kies je hiervoor? [2 pt]

(b) Beschrijf in woorden wat voor bewegingen je verwacht. Geef een schatting van de optredende bewegingsfrequenties. [3 pt]

(c) Stel de Lagrangiaan op in termen van de gegeneraliseerde coördinaten. Er is een term in de Lagrangiaan die te maken heeft met de koppeling tussen de bewegingen van de twee massa's. Geef aan welke term dit is. [4 pt]

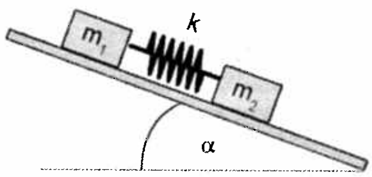
(d) Gebruik de Lagrangevergelijkingen om de differentiaalvergelijkingen voor de beweging op te stellen. [3 pt]

(e) Maak een benadering voor kleine uitwijking, verwaarloos daarbij ook producten van uitwijkingen en/of hun tijdsafgeleiden. [2 pt]

(f) Los de vereenvoudigde bewegingsvergelijkingen op. Klopt het resultaat met je verwachtingen bij (b) ? [3 pt]

2 Veer op een helling

Twee blokken met ongelijke massa's m_1 en m_2 liggen op een hellend vlak met hellingshoek α (zie figuur 1). De blokken zijn onderling verbonden door een ideale veer met veerconstante k. De blokken glijden wrijvingsloos over het vlak. Blokken en veer bevinden zich in het vlak van de tekening en ook hun bewegingen vinden uitsluitend in dit vlak plaats. [Totaal: 15 pt]



Figuur 1: Twee blokken met ongelijke massa's op een helling.

(a) Schrijf de Lagrangiaan voor dit systeem in termen van de Cartesische coördinaten x_1, y_1 en x_2, y_2 voor de posities van het linker (m_1) en rechter (m_2) blok. Kies daarbij de x-as langs de helling en de y-as loodrecht op de helling omhoog. Houd hierbij nog geen rekening met de beperking dat de blokken op de helling blijven. [4 pt]

(b) Geef de twee constraint-vergelijkingen op voor de beweging van de twee blokken. [2 pt]

(c) Gebruik het Euler-Lagrangeformalisme met de Lagrange-multiplier techniek om de bewegingsvergelijkingen (differentiële vorm) op te stellen. [3 pt]

(d) Wat is de kracht die ervoor zorgt dat de blokjes op de helling blijven? Reken de grootte van de kracht uit met behulp van de Lagrange-multiplier. [2 pt]

(e) Welke lineaire combinaties van de bewegingsvergelijkingen in onderdeel (c) zijn handig voor het oplossen? Maak hiervan gebruik en geef de algemene oplossing. [4 pt]

3 Korte vragen

[Totaal: 8 pt]
Beschouw de volgende bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} - \gamma\left(A^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\beta^2}\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(een variant op de *Van der Pol oscillator*). Deze vergelijking lijkt op die voor een gedempte oscillator.

(a) Is de vergelijking linear? Waarom (niet)? [2 pt]

(b) De coëfficiënt $-\gamma\left(A^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\beta^2}\right)$ van de dempingsterm is positief, negatief en nul in verschillende gebieden van de toestandsruimte $x, \dot{x}$. Schets dit gedrag. Leg uit wat dit voor gevolg heeft voor de beweging vanuit verschillende startpunten. [3 pt]

De Lagrangiaan voor een geladen deeltje in een elektromagnetisch veld is:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q(V - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

waarin $\vec{r}$ de positie en q de lading van het deeltje is, $V(\vec{r})$ is de elektrostatische potentiaal en $\vec{A}(\vec{r})$ de elektromagnetische vectorpotentiaal.

(c) Schrijf de vergelijking uit in Cartesische coördindaten $\vec{r} = (x, y, z)$ en bepaal de gegeneraliseerde impuls p_x. Wat is de fysische interpretatie van het resultaat? [3 pt]

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \delta S = \delta \int_1^2 \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0$$

$$f_{\text{cstr},j}(q_i) = 0 \qquad \mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_{\text{cstr},j}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$