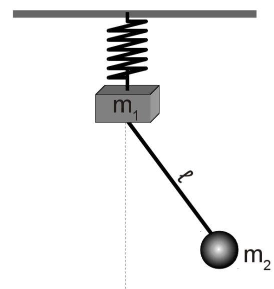
Tentamen Mechanica 2

NS-350B, Blok 3, 19 April 2012

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**.
Gebruik per opgave een **apart vel**.
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag.

1 Verend opgehangen slinger



Aan het plafond hangt een massa m_1 aan een ideale veer (veerconstante k) die alleen in de vertikale richting kan bewegen. Aan m_1 is een slinger bevestigd met daaraan een massa m_2 (zie afbeelding hiernaast). [Totaal: 17 pt]

(a) Hoe groot is het minimale aantal coördinaten waarmee je de beweging van de twee massa's volledig kunt beschrijven? Welke gegeneraliseerde coördinaten kies je hiervoor? [2 pt]

(b) Beschrijf in woorden wat voor bewegingen je verwacht. Geef een schatting van de optredende bewegingsfrequenties. [3 pt]

(c) Stel de Lagrangiaan op in termen van de gegeneraliseerde coördinaten. Er is een term in de Lagrangiaan die te maken heeft met de koppeling tussen de bewegingen van de twee massa's. Geef aan welke term dit is. [4 pt]

(d) Gebruik de Lagrangevergelijkingen om de differentiaalvergelijkingen voor de beweging op te stellen. [3 pt]

(e) Maak een benadering voor kleine uitwijking, verwaarloos daarbij ook producten van uitwijkingen en/of hun tijdsafgeleiden. [2 pt]

(f) Los de vereenvoudigde bewegingsvergelijkingen op. Klopt het resultaat met je verwachtingen bij (b) ? [3 pt]

Oplossing

(a) 2 coördinaten, bijvoorbeeld de uitwijking van de veer x en de slingerhoek ϕ

(b) Er zijn twee oscillatiemodes, een voor de veer, hoekfrequentie $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ en een voor de slinger hoekfrequentie $\omega_2 \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$

(c) Kies de x-as naar beneden en naar rechts. Dan is de positie van blokje 2:

$$x_2 = x + l\cos\phi, \qquad y_2 = l\sin\phi$$

Voor de potentiële energie:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - m_1 g x - m_2 g(x + l\cos\phi)$$

Let op: het minus-teken voor x hangt af van de definitie van de x-as (omhoog of omlaag) maar het min-teken voor de $l\cos\phi$ term is onvermijdelijk (verandert wel als je ϕ ten opzichte van de horizontale richting definieert, maar dat is erg onhandig).

kinetische energie:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x} - l\dot{\phi}\sin\phi \qquad \dot{y}_2 = l\dot{\phi}\cos\phi$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2l\dot{\phi}\dot{x}\sin\phi + l^2\dot{\phi}^2)$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 - 2l\dot{\phi}\dot{x}\sin\phi + l^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kx^2 + m_1gx + m_2g(x + l\cos\phi)$$

De koppelingsterm is $-m_2l\dot{\phi}\dot{x}\sin\phi$

(d) Neem eerst de benodigde afgeleiden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} &= -kx + (m_1+m_2)g \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} &= (m_1+m_2)\dot{x} - m_2l\dot{\phi}\sin\phi \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} &= (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2l\ddot{\phi}\sin\phi - m_2l\dot{\phi}^2\cos\phi \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= -m_2l\dot{\phi}\dot{x}\cos\phi - m_2gl\sin\phi \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} &= -m_2l\dot{x}\sin\phi + m_2l^2\dot{\phi} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} &= -m_2l(\ddot{x}\sin\phi + \dot{x}\dot{\phi}\cos\phi) + m_2l^2\ddot{\phi}
\end{aligned}$$

De bewegingsvgl zijn nu:

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)\ddot{x} - m_2l\ddot{\phi}\sin\phi - m_2l\dot{\phi}^2\cos\phi &= -kx + (m_1+m_2)g \\
\ddot{x} &= \frac{m_2l}{m_1+m_2}(\ddot{\phi}\sin\phi - \dot{\phi}^2\cos\phi) - \frac{k}{m_1+m_2}x + g \\
-m_2l(\ddot{x}\sin\phi - l\ddot{\phi}) &= -m_2lg\sin\phi \\
\ddot{\phi} &= -\frac{g}{l}\sin\phi + \frac{1}{l}\ddot{x}\sin\phi
\end{aligned}$$

(er is een term $-m_2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi$ die zowel links als rechts voorkomt in de derde vgl en dus wegvalt.)

NB: het omschrijven van de x-vgl naar de vorm $\ddot{x} =$ is niet nodig. Voor de ϕ-vgl verwachten we wel dat je opmerkt dat er een term wegvalt en dat je de overtollige factor m_2l uitdeelt (max 1/2 punt aftrek).

Dit is een gekoppeld stelsel; niet te scheiden in vgl voor x en ϕ apart

(e) Kleine x, ϕ, $\dot{x}$, $\dot{\phi}$, en dus ook $\sin\phi \approx \phi$, zodat de bew vgl:

$$
\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\ddot{x} &= -kx + (m_1 + m_2)g && (1)\\
\ddot{x} &= -\frac{k}{m_1 + m_2}x + g && (2)\\
\ddot{\phi} &= -\frac{g}{l}\phi && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}
$$

(f) De eerste vgl is een oscillator: $x = x_0 + A\cos(\omega_1 t + \delta_1)$, met $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$ en $x_0 = (m_1 + m_2)\frac{g}{k}$ (deze laatste term is een specifieke oplossing van de inhomogene vgl)

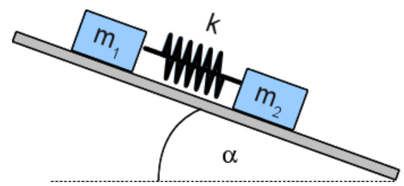
Laatste vgl is een slinger, algemene oplossing: $\phi = B\cos(\omega_2 t + \delta_2)$, met $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

dit klopt idd met de verwachting

De integratieconstanten A, B, δ_1 en δ_2 worden bepaald door de begintoestand van de slinger en de veer. Bij nakijken wordt tot 1 punt afgetrokken als de integratieconstanten niet worden genoemd.

2 Veer op een helling

Twee blokken met ongelijke massa's m_1 en m_2 liggen op een hellend vlak met hellingshoek α (zie figuur 1). De blokken zijn onderling verbonden door een ideale veer met veerconstante k. De blokken glijden wrijvingsloos over het vlak. Blokken en veer bevinden zich in het vlak van de tekening en ook hun bewegingen vinden uitsluitend in dit vlak plaats. [Totaal: 15 pt]



Figuur 1: Twee blokken met ongelijke massa's op een helling.

(a) Schrijf de Lagrangiaan voor dit systeem in termen van de Cartesische coördinaten x_1, y_1 en x_2, y_2 voor de posities van het linker (m_1) en rechter (m_2) blok. Kies daarbij de x-as langs de helling en de y-as loodrecht op de helling omhoog. Houd hierbij nog geen rekening met de beperking dat de blokken op de helling blijven. [4 pt]

(b) Geef de twee constraint-vergelijkingen op voor de beweging van de twee blokken. [2 pt]

(c) Gebruik het Euler-Lagrangeformalisme met de Lagrange-multiplier techniek om de bewegingsvergelijkingen (differentiële vorm) op te stellen. [3 pt]

(d) Wat is de kracht die ervoor zorgt dat de blokjes op de helling blijven? Reken de grootte van de kracht uit met behulp van de Lagrange-multiplier. [2 pt]

(e) Welke lineaire combinaties van de bewegingsvergelijkingen in onderdeel (c) zijn handig voor het oplossen? Maak hiervan gebruik en geef de algemene oplossing. [4 pt]

2.1 Oplossing

Belangrijk: De assenstelsels (x, y) lopen parallel/loodrecht op de helling! Wij maken bij het opstellen van $\mathcal{L}$ nog *geen* gebruik van de constraints!

(a) Voor de Lagrangiaan hebben wij kinetische de en potentiële energie van de twee blokjes nodig:

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \tfrac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right).$$

Voor de potentiële energie hebben wij twee bijdragen, een door de zwartekracht en een door de potentiële energie van de veer $U_{\text{veer}} = \frac{1}{2}ku^2$. Het is handig de twee coördinatenstelsels (x_1, y_1) en (x_2, y_2) zodanig te kiesen dat voor $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ geldt dat $u = 0$:

$$\begin{aligned} U_{\text{zw}} &= g\left(m_1h_1 + m_2h_2\right)\begin{cases} h_1 &= -x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \\ h_2 &= -x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha \end{cases} \\ U_{\text{veer}} &= \tfrac{1}{2}ku^2 = \tfrac{1}{2}k\left(\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2\right). \end{aligned}$$

De Lagrangiaan is $\mathcal{L} = T - U_{\text{zw}} - U_{\text{veer}}$.

(b) De twee constraint vergelijkingen zijn heel eenvoudig $y_j = 0$, of:

$$f_1 = y_1 \qquad f_2 = y_2. \tag{5}$$

(c) Om de bewegingsvergelijkingen te vinden gebruiken wij:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Omdat de constraintvergelijkingen alleen y_1 of y_2 bevatten, zijn de bewegingsverlijkingen in x eenvoudig:

$$m_1 g\sin\alpha + k(x_1 - x_2) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} + \overbrace{\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1}}^{=0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1 \tag{6}$$

$$m_2 g\sin\alpha - k(x_1 - x_2) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} + \underbrace{\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_2}}_{=0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2 \tag{7}$$

De bewegingsvergelijkingen voor y_j bevatten elke een Langrange Multiplier:

$$\begin{aligned} -m_1 g\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\left(y_1 - y_2\right) + \lambda_1 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_1} + \overbrace{\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_1}}^{=\lambda_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}_1} = m_1\ddot{y}_1 \\ -m_2 g\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\left(y_1 - y_2\right) + \lambda_2 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_2} + \underbrace{\sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_2}}_{=\lambda_2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}_2} = m_2\ddot{y}_2 \end{aligned} \tag{8}$$

(d) De *Normaalkracht* zorgt ervoor dat de blokjes op de helling blijven. Gebruik 5 en 8, en je vindt

$$F_{N1} = \lambda_1 \overbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}^{=1} = m_1 g \cos\alpha$$
$$F_{N2} = \lambda_2 \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial y_2}}_{=1} = m_2 g \cos\alpha.$$

(e) Gebruik de vergelijkingen in 6 en 7; de som van deze twee vergelijkingen verliest de koppelingsterm, en je kan het zien als een versnelde (val)beweging van een "massamiddelpunt" ($M\ddot{X} = g^* = g\sin\alpha$, met $X = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{M}$ en $M = m_1 + m_2$); het verschil (vermenigvuldig 6 met m_2 en 7 met m_1 om de zwaartekrachttermen te verwijderen) levert een trilling rond het massamiddelpunt ($\mu\ddot{u} = -ku$, met $u = x_1 - x_2$ en $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$).

3 Korte vragen

[Totaal: 8 pt]
Beschouw de volgende bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} - \gamma\left(A^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\beta^2}\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(een variant op de *Van der Pol oscillator*). Deze vergelijking lijkt op die voor een gedempte oscillator.

(a) Is de vergelijking linear? Waarom (niet)? [2 pt]

(b) De coëfficiënt $-\gamma\left(A^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{\beta^2}\right)$ van de dempingsterm is positief, negatief en nul in verschillende gebieden van de toestandsruimte $x, \dot{x}$. Schets dit gedrag. Leg uit wat dit voor gevolg heeft voor de beweging vanuit verschillende startpunten. [3 pt]

De Lagrangiaan voor een geladen deeltje in een elektromagnetisch veld is:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q(V - \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})$$

waarin $\vec{r}$ de positie en q de lading van het deeltje is, $V(\vec{r})$ is de elektrostatische potentiaal en $\vec{A}(\vec{r})$ de elektromagnetische vectorpotentiaal.

(c) Schrijf de vergelijking uit in Cartesische coördindaten $\vec{r} = (x, y, z)$ en bepaal de gegeneraliseerde impuls p_x. Wat is de fysische interpretatie van het resultaat? [3 pt]

Oplossing

(a) De vergelijking is niet linear. Dat wil zeggen dat de som van twee oplossingen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ in het algemeen geen oplossing is van de vergelijking. Dit komt door de termen met x^2 en $x^2\dot{x}$.

(b) De wrijvingsterm is negatief als $(x, \dot{x})$ binnen de ellips $x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\beta^2} = A^2$ ligt en positief daarbuiten. Bewegingen die beginnen buiten de ellips verliezen langzaam energie en bewegen dus naar de ellips toe. Als een beweging binnen de ellips start, voert de wrijvingsterm energie toe en zal de beweging ook naar de ellips toe bewegen.

(c) In Cartesische coordinaten:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - q(V - \dot{x}A_x - \dot{y}A_y - \dot{z}A_z)$$

zodat:

$$p_x = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{x}} = m\dot{x} - qA_x$$

Dit betekent dat de impuls naast een mechanische component ($m\dot{x}$) ook een bijdrage heeft van het (magnetische) veld (qA_x).

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad \delta S = \delta\int_1^2 \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0$$

$$f_{\text{cstr,j}}(q_i) = 0 \qquad \mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_{\text{cstr,j}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$