Hertentamen Mechanica 2

Blok 3 en 4, 25 augustus 2011

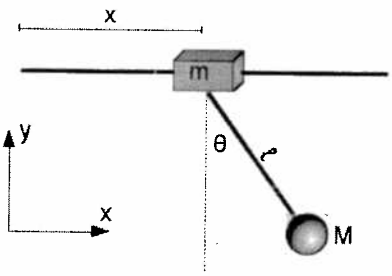
Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!
Gebruik per opgave een apart vel!

Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

Dit tentamen is bedoeld als hertentamen voor blok 4, maar kan ook tellen als hertentamen voor het hele vak (blok 3 en 4). Voor studenten die een voldoende hebben voor de eerste deeltoets, geldt het gunstigste cijfer (ófwel totaal blok 3 en dit hertentamen ófwel alleen het hertentamen).

1 Glijdende Slinger

Een slinger met massa M en lengte ℓ is opgehangen aan een blok met massa m dat wrijvingsloos lang een rails in de horizontale x-richting kan bewegen (zie figuur 1). (Totaal 15 pt)



Figuur 1: Slinger met beweegbaar ophangpunt

(a) Geef de potentiële energie U en de kinetische energie T van het systeem. [5 pt]

(b) Geef de Lagrangiaan $\mathscr{L}$ van het systeem. [2 pt]

(c) Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor x en θ. [5 pt]

(d) Hoe verwacht je dat de beweging eruit zien in de limiet dat $\ddot{x} \to 0$? En in de limiet $\ddot{\theta} \to 0$? Laat voor beide limieten zien dat de bewegingsvergelijkingen het verwachte gedrag hebben. [3 pt]

1.1 Theorie

(Deze vraag kan samen met onderdeel 1 op één antwoordblad worden ingeleverd.) [Totaal: 5 pt]

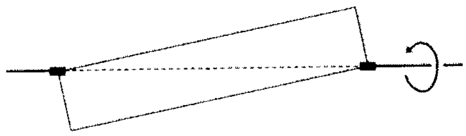
(a) In het college zijn zowel het Langrange- als het Hamiltonformalisme behandeld. Leg uit waarom het voor een systeem met *negeerbare coördinaten* (*ignorable coordinates*) vaak handiger is om het Hamiltonformalisme te gebruiken. Geef daarnaast nog twee verschillen aan tussen het Hamiltonformalisme en het Lagrangeformalisme. [3 pt]

(b) In oktober wordt er een Russische Soyuz-raket gelanceerd vanaf een ESA-lanceerplaats in Kourou, Frans Guyana (breedte: 5° Z) in plaats van de gebruikelijke basis Baikonur Cosmodrom in Kazachstan (breedte: 45° N). Dankzij het nieuwe startpunt kan de raket 75% meer massa in een baan om de aarde brengen. Bespreek welke aspecten een rol spelen in de relatie tussen het maximale startgewicht en de breedtegraad waaar de lancering plaatsvindt. Geef minstens één reden waarom dezelfde raket vanuit Kourou meer massa kan meedragen dan vanuit Kazachstan. [2 pt]

Je hoeft hierbij geen berekeningen uit te voeren, maar indien nodig mag je aannemen dat de aarde een perfecte bol is met straal $R = 6571$ km en dat de uiteindelijke baan van de satelliet precies boven de evenaar loopt op 23000 km hoogte.

2 Kantelende plank

Beschouw een rechthoekige, dunne plank, met verwaarloosbare dikte, en met een breedte b en lengte l ($l > b$) en massa m. Op twee tegenover elkaar liggende hoekpunten is een lager aangebracht, waarom de plank kan draaien. We laten de plank draaien in de aangegeven richting, met hoeksnelheid ω. [totaal: 20 pt]



(a) Neem de figuur over en geef de 3 hoofdassen aan van de plank, en bereken de bijbehorende traagheidsmomenten. [4 pt]

(b) Reken het impulsmoment uit van de draaiende plank t.o.v. haar massamiddelpunt (grootte en richting). Teken de impulsmomentvector t.o.v. de plank. [5 pt]

(c) Reken het krachtmoment uit dat nodig is om de plank rond de voorgeschreven as te laten draaien. Teken ook deze vector in. [5 pt]

(d) Hoe groot moeten de krachten zijn in de twee lagers, om het benodigde krachtmoment te leveren? In welke richting staan deze krachten? [3 pt]

(e) Als de plank plotseling losschiet uit de lagers, voert deze dan vanaf dat moment een simpele draaiing uit rondom een van de hoofdassen? Beredeneer je antwoord. [3 pt]

3 Slinger van Foucault

We beschouwen een lange mathematische slinger van lengte l waaraan een puntmassa m is opgehangen. De slinger kan vrij roteren in het ophangpunt (twee richtingen).

We bekijken dit systeem in een laboratorium op het aardoppervlak. De straal van de aarde is R en de omwentelingssnelheid Ω. Het laboratorium bevindt zich op co-breedte θ. De co-breedte is 90° minus de geografische breedte (0 op de polen, 90° op de evenaar). [totaal: 20 pt]

(a) De twee voornaamste krachten op de massa van de slinger zijn de zwaartekracht en de spankracht $\vec{T}$ in de slingerdraad. Maak een schets van de slinger in een Cartesisch coördinatensysteem en geef daarin de krachten aan. [3 pt]

(b) Er werken ook twee schijnkrachten ten gevolge van de rotatie van de aarde op de slinger: de middelpuntvliedende kracht en de Coriolis-kracht. Geef de algemene uitdrukking voor de grootte en richting van deze krachten. [3 pt]

(c) De middelpuntvliedende kracht kan opgeteld worden bij de zwaartekracht. Dit geeft een effectieve valversnelling $\vec{g}$. Voor kleine uitwijking van de slinger kunnen we de benadering maken dat $T_z = \cos\alpha T \approx T = -m\vec{g}$. Laat zien dat in deze benadering voor de x en y-componenten van $\vec{T}$ geldt [3 pt]:

$$T_x = -mgx/l \quad \text{en} \quad T_y = -mgy/l$$

(d) Geef de differtiaalvergelijkingen voor de beweging van de slinger in de benadering dat de uitwijking klein is. Daarbij kunnen ook termen met $\dot{z}$ verwaarloosd worden. [6 pt]

(e) Los de differentiaalvergelijking op en geef een uitdrukking voor de precessiefrequentie van de slinger in het laboratorium. [5 pt]

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$E = \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}{2L^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int dx \int dy \int dz\ \rho(x,y,z)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_0} = \dot{Q} + \Omega \times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{Q} + 2\Omega \times \dot{Q} + \Omega \times (\Omega \times Q)$$

$$\mathscr{L} = T - V \qquad \frac{\partial \mathscr{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\mathscr{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathscr{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_i}$$

$$\mathbf{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \qquad \dot{\mathbf{L}} + \omega \times \mathbf{L} = \mathbf{\Gamma}$$