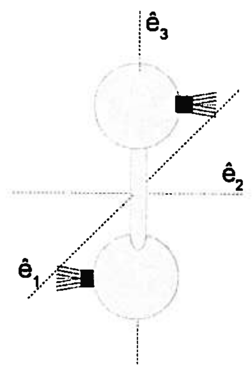
Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 28 juni 2012

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!
Gebruik per opgave een apart vel!
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

1 Haltervormige Satelliet

Een satelliet is opgebouwd uit twee bolvormige gedeelten, die verbonden zijn door een cilindrische buis. De bollen hebben elk een straal R en een massa m, en de buis heeft een lengte l en een verwaarloosbaar kleine massa. Neem aan dat de massa van de bollen homogeen over hun volume is verdeeld. **[totaal: 25 pt]**



a) Bereken de drie hoofdtraagheidsmomenten. Hierbij mogen de twee bollen *niet* als puntmassa's worden beschouwd! (Tip: als je het traagheidsmoment van een bol niet weet en niet kunt uitrekenen, laat het als onbekende I in de formule voor de λ_i's staan!) [5 pt]

b) Op het midden van elke bol bevindt zich een stuurraket waarmee een rotatie om as 1 kan worden bewerkstelligd. Stel dat $R = 10\,\text{m}$, $l = 20\,\text{m}$ en $M = 1000\,\text{kg}$. Stel verder dat de stuwkracht per raket $F = 25\,\text{N}$ bedraagt. Hoe lang moeten de twee raketten aanstaan om een kunstmatige zwaartekrachtsversnelling te genereren in het midden van de twee bollen van $\frac{1}{2}g$? [3 pt]

c) Wat voor krachten voelt een astronaut als deze in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt? [2 pt]

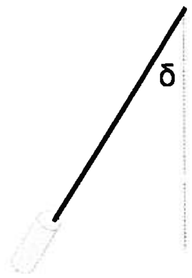
d) Gebruik de Eulervergelijkingen zonder koppel (zie formuleblad) om te analyseren wat er gebeurt met de rotatie als de stuwraketten niet alleen een draaiing rondom as 1 hebben veroorzaakt maar ook een lichte rotatie om as 3; m.a.w. geef de rotatiesnelheden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als functie van de tijd, uitgaande van $\omega_2 = 0$ en $\omega_3 \ll \omega_1$ op tijdstip $t = 0$. [5 pt]

We brengen de satelliet in een cirkelbaan met straal r om een planeet met massa M_P en laten de satelliet precies zo rond zijn as 1 draaien, dat een van de twee bollen voortdurend in de richting van de planeet wijst.

e) Gemiddeld heerst er nu binnen de satelliet gewichtsloosheid. Toch zijn er kleine variaties. Hoe groot is de daardoor optredende versnelling die in het midden van elk van de twee bollen te voelen is? (Tip: gebruik een Taylor expansie t/m de lineaire term) In welke richting staat deze versnelling in elke bol? Hoe noem je deze versnelling of de daarmee geassocieerde krachten? [6 pt]

f) Wat voor beweging zal de satelliet maken ten gevolge van de bij e) beschouwde versnellingen als as 3 van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is? Reken deze beweging uit in de limiet van een kleine initiële afwijking θ_0. [4 pt]

2 Traagheids- en Schijnkrachten



De traagheidskrachten als gevolg van versnelling in een bewegend voertuig worden waargenomen door een vrijhangend schietlood (een gewicht aan een koord), waarvan de richting steeds samenvalt met de combinatie van de zwaartekracht $m\vec{g}_0$ plus de schijnkrachten binnen het voertuig. **[totaal: 20 pt]**

Bij het begin van een rit trekt de auto eenparig versneld op, in een tijd T, vanuit stilstand tot een snelheid v. Aan het eind van de rit remt de auto met constante remkracht af, in een tijd $\frac{1}{4}T$ van de snelheid v tot stilstand. De hoogte verandert tijdens het rit niet.

a) Reken uit in welke richting het schietlood hangt, zowel tijdens optrekken als bij het afremmen. Geef zowel de hoek aan die het koord maakt met de verticaal, als ook de horizontale richting van de afwijking. Laat hierbij de versnellingen ten gevolge van de aardrotatie buiten beschouwing. [4 pt]

b) Nu bekijken wij het geval dat de auto met constante snelheid v een bocht maakt, die beschreven kan worden als een deel van een cirkel met een straal R. Reken opnieuw de stand uit van het schietlood (laat opnieuw de aardrotatie buiten beschouwing). [3 pt]

We beschouwen tenslotte een vliegtuig dat op breedtegraad θ (noordelijk halfrond) met constante snelheid v en op constante hoogte naar het noorden vliegt. Neem aan dat de aarde een perfecte bolvom heeft, en dat de beweging op elk moment als rechtlijnig kan worden beschouwd.

c) Geef de scheefstand aan van het schietlood die door de Coriolisversnelling wordt veroorzaakt (dus opnieuw de grootte van de hoek en de richting). Breng hierbij uitsluitend de horizontale component van de Coriolisversnelling in rekening en verwaarloos het effect van de eventueel aanwezige verticale component. Laat ook de centrifugaalversnelling ten gevolge van de aardrotatie buiten beschouwing en beargumenteer waarom dit mag. [5 pt]

d) Beantwoord dezelfde vraag voor het geval dat het vliegtuig naar het noordoosten vliegt. [6 pt]

e) Als de snelheid v van het vliegtuig ten opzichte van het aardoppervlak bekend is, en g en Ω bekende constanten zijn, wat kan je dan uit de scheefstand afleiden? [2 pt]
suggesties: vlieghoogte, vliegrichting, positie noord/zuid/west/oost, poolhoek θ, azimut ϕ, ...

3 Hamiltoniaan in een Centraal Krachtveld

Een deeltje beweegt in een centraal krachtveld $\vec{F}(r,t) = -\frac{k}{r^2}e^{-\beta t}\hat{r}$ met k en β positieve constanten, t is de tijd, en r is de afstand van het deeltje tot het centrum. **[totaal: 15 pt]**

Tip: *Gebruik je kennis van bewegingen in een centraal krachtveld om te bepalen, hoeveel coördinaten je nodig hebt!*

a) Vind de Hamiltoniaan $\mathcal{H}$ voor het deeltje. [6 pt]

b) Gebruik de Hamiltoniaan om een bewegingsvergelijking te vinden. [5 pt]

c) Vergelijk de Hamiltoniaan met de totale energie van het deeltje. Waarom zijn deze gelijk/ongelijk? [2 pt]

d) Is de energie van het deeltje behouden? Gebruik een eenvoudige situatie als voorbeeld om te bespreken waarom (niet)? [2 pt]

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$E = \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}{2\ell^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rel}} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \qquad J_{ij} = I_{ij}^{\mathrm{cm}} + m\left(||\vec{a}||^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int dx \int dy \int dz\ \rho(x,y,z)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_0} = \dot{Q} + \Omega \times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{Q} + 2\Omega \times \dot{Q} + \Omega \times (\Omega \times Q)$$

$$\mathcal{L} = T - V \qquad \frac{\partial \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\vec{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \qquad \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\Gamma}$$

$$\text{Series}\left(\frac{1}{x^2}, x = r\right) = \frac{1}{r^2} - 2\frac{x-r}{r^3} + \mathcal{O}\left((x-r)^2\right)$$