Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 28 juni 2012

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!

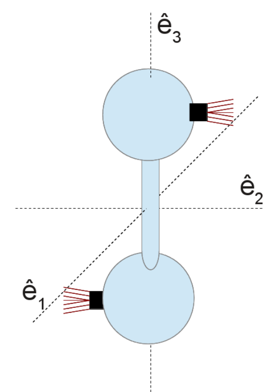
Gebruik per opgave een apart vel!

Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

Noot bij uitwerkingen: De uitwerkingen hieronder zijn in eerste instantie bedoeld als geheugensteun bij het nakijken en daarom soms wat bonding (of zelfs incompleet). Op het tentamen is het belangrijk dat je aangeeft dat je begrijpt wat je doet. Daarvoor is soms extra tekst of uitleg nodig.

1 Haltervormige Satelliet

Een satelliet is opgebouwd uit twee bolvormige gedeelten, die verbonden zijn door een cilindrische buis. De bollen hebben elk een straal R en een massa m, en de buis heeft een lengte l en een verwaarloosbaar kleine massa. Neem aan dat de massa van de bollen homogeen over hun volume is verdeeld. [**totaal: 25 pt**]



a) Bereken de drie hoofdtraagheidsmomenten. Hierbij mogen de twee bollen *niet* als puntmassa's worden beschouwd! (Tip: al je het traagheidsmoment van een bol niet weet en niet kunt uitrekenen, gebruik dan een schatting; zorg ervoor dat de dimensies in ieder geval kloppen!) [5 pt]

b) Op het midden van elke bol bevindt zich een stuurraket waarmee een rotatie om as 1 kan worden bewerkstelligd. Stel dat $R = 10$m, $l = 20$m en $M = 1000$kg. Stel verder dat de stuwkracht per raket $F = 25$N. bedraagt. Hoe lang moeten de twee raketten aanstaan om een kunstmatige zwaartekrachtsversnelling te genereren in het midden van de twee bollen van $\frac{1}{2}g$? [3 pt]

c) Wat voor krachten voelt een astronaut als deze in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt? [2 pt]

d) Gebruik de Eulervergelijkingen $\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\Gamma}$ om te analyseren wat er gebeurt met de rotatie als de stuwraketten niet alleen een draaiing rondom as 1 hebben veroorzaakt maar ook en lichte rotatie om as 3; m.a.w geef de rotatiesnelheden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als functie van de tijd, uitgaande van $\omega_2 = 0$ en $\omega_3 \ll \omega_1$ op tijdstip $t = 0$. [5 pt]

We brengen de satelliet in een cirkelbaan met straal r rondom een planet met massa M_P en laten de satelliet zo langzaam rondom zijn as 1 draaien, dat een van de twee bollen voortdurend in de richting van de planeet wijst.

e) Gemiddeld heerst er nu binnen de satelliet gewichtsloosheid. Toch zijn er kleine variaties. Hoe groot is de daardoor optredende versnelling die in het midden van elk van de twee bollen te voelen is? (Tip: gebruik een Taylor expansie t/m de lineair term) In welke richting staat deze versnelling in elke bol? Hoe noem je deze versnelling of de daarmee geassocieerde krachten? [6 pt]

f) Wat voor beweging zal de satelliet maken ten gevolge van de bij e beschouwde vernellingen als as 3 van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is? Reken deze beweging uit in de limiet van een kleine initiële afwijking θ_o. [4 pt]

1.1 Solution

a) The moment of inertia of a homogeneous sphere is $I = \frac{2}{5}mR^2$. Using this, plus the parallel axis theorem, we find $\lambda_3 = 2I$ and $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{12} = 2\left(I + m\left(R + \frac{1}{2}l\right)^2\right)$.

b) We want the centrifugal acceleration at the center of a sphere $\omega_1^2\left(R + \frac{1}{2}l\right)^2$ to equal $\frac{1}{2}g$. We use $L = \lambda_{12}\omega_1 = \tau t = 2F\left(R + \frac{1}{2}l\right)t$ or

$$t = \frac{\lambda_{12}\sqrt{\frac{g}{2\left(R+\frac{1}{2}l\right)}}}{2F\left(R + \frac{1}{2}l\right)} \approx \frac{8.8E5\mathrm{kgm}^2 \cdot 0.5/\mathrm{s}}{50\mathrm{N} \cdot 20\mathrm{m}} = 440\mathrm{s}$$

c) Besides the centrifugal force that we have already calculated, and that will diminish in the center between the two sphere, there will also be a coriolis force of magnitude $2\omega_1 v$ if the astronaut moves.

d) From the Euler equations, we see that $\dot{\omega}_3 = 0$ as expected, and that ω_1 and ω_2 are coupled:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\omega}_1 - \Omega_B\omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega_B\omega_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_1 = \omega_0\cos\left(\Omega_B + \delta\right) \\ \omega_2 = \omega_0\sin\left(\Omega_B + \delta\right) \end{array}\right. ,$$

where $\Omega_B = \frac{\lambda_{12}-\lambda_3}{\lambda_{12}}\omega_3$. The phase δ is zero, as we started with $\omega_2(0) = 0$, and ω_0 is the calculated angular velocity from above.

e) First we have to identify the possible source of forces. It is clear that there are only two candidates: attractive force of gravity, and the centrifugal force. We are in a circular orbit of constant radius r and angular velocity Ω, the centres of the two spheres are at a distance $r_\pm = r \pm \left(R + \frac{1}{2}l\right)$, and as the orbit is stable, the sum of forces must be zero:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{grav}}^{\mathrm{total}} = -GM_Pm\left(\frac{1}{r_+^2} + \frac{1}{r_-^2}\right) &= -m\Omega^2\left(r_+ + r_-\right) = F_{\mathrm{cf}}^{\mathrm{total}} && (1) \\ -G\frac{M_Pm}{r^2}\left(1 - 2\frac{r_+ - r}{r} + 1 - 2\frac{r_- - r}{r}\right) &= -m\Omega^2 r \\ -2G\frac{M_Pm}{r^2} &= -2m\Omega^2 r \\ G\frac{M_P}{r^3} &= \Omega^2 && (2) \end{aligned}$$

When we split the above force equation 1 into parts corresponding to the forces at the center of the two spheres and use the value of Ω found in equation 2, we find that the acceleration at the center of the two spheres $a_\pm = 3GM_P\frac{r-r_\pm}{r^3}$. The magnitude of both is equal, but their direction is opposite; both point away from the centre of mass. We have encountered this type of force behaviour before in the case of the tides.

f) If axis 3 is not perfectly aligned to the planet, the tide forces calculated above cause a torque $\tau = -2M|a_\pm|(R+\frac{l}{2})\sin\theta \sim -Ma(2R+l)\theta$. If you aren't sure about the sign of the torque, try to relate Torque and angle by $\dot{L} = \lambda_{12}\dot{\omega}_1 = \lambda_{12}\ddot{\theta} = \tau$; as the torque is restoring (*i.e.* trying to return the system to $\theta \to 0$, we posit a harmonic solution

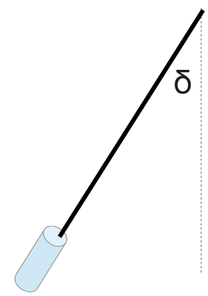
$$\theta = \theta_o \cos(\omega t)$$

where

$$\omega = \sqrt{\frac{2m|a_\pm|(R+\frac{l}{2})}{\lambda_{12}}} = \sqrt{3\frac{GM_p}{r^3}\cdot\frac{2m\left(R+\frac{l}{2}\right)^2}{\lambda_{12}}} = \Omega\sqrt{3\frac{\lambda_{12}-\lambda_3}{\lambda_{12}}}$$

.

2 Traagheids- en Schijnkrachten



De traagheidskrachten als gevolg van versnelling in een bewegend voertuig worden waargenomen door een vrijhangend schietlood (een gewicht aan een koord), waarvan de richting steeds samenvalt met de combinatie van de zwaartkrachtsversnelling $\vec{g}_o$ plus de schijnversnellingen binnen het voertuig. Bij het begin van een rit trekt de auto eenparig versneld op, in een tijd T, vanuit stilstand to een snelheid v. Aan het eind van de rit remt de auto met constante remkracht af, in een tijd $\frac{1}{4}T$ van de snelheid v tot stilstand. De hoogte verandert tijdens het rit niet. **[totaal: 20 pt]**

a) Reken uit in welke richting het schietlood hangt, zowel tijdens optrekken als bij het afremmen. Geef zowel de hoek aan die het koord maakt met de verticaal, als the horizontale richting van de afwijking. Laat hierbij de versnellingen ten gevolge van de aardrotatie buiten beschouwing. [4 pt]

Nu bekijken wij het geval dat de auto met constante snelheid v een bocht maakt, die beschreven kan worden als een deel van een cirkel met een straal R.

b) Reken opnieuw de stand uit van het schietlood (laat opnieuw de aardrotatie buiten beschouwing). [3 pt]

We beschouwen tenslotte een vliegtuig dat op breedtegraad θ (noordelijk halfrond) met constante snelheid v en op constante hoogte naar het noorden vliegt. Neem aan dat de aarde een perfecte bolvom heeft, en dat de beweging op elk moment als rechtlijnig kan worden beschouwd.

c) Geef de scheefstand aan van het schietlood die door de Coriolisversnelling wordt veroorzaakt (dus opnieuw de grootte van de hoek en de richting). Breng hierbij uitsluitend de horizontale component van de Coriolisversnelling in rekening en verwaarloos het effect van de eventueel aanwezige verticale component. Laat ook de centrifugaalversnelling ten gevolge van de aardrotie buiten beschouwing (waarom mag dit?). [5 pt]

d) Beantwoord dezelfde vraag voor het geval dat het vliegtuig naar het noordoosten vliegt. [6 pt]

e) Als de snelheid v van het vliegtuig ten opzichte van het aardoppervlak bekend is, en g en Ω en dergelijke bekende constanten zijn, wat kan je dan uit de scheefstand afleiden? [2 pt] suggesties: vlieghoogte, vliegrichting, positie noord/zuid: poolhoek θ, positie west/oost: azimut ϕ, ...

2.1 Uitwerking

a) Tijdens het optrekken hangt het schietlood *naar achteren*, met $\tan\delta = \frac{ma}{mg} = \frac{v}{gT}$. Tijdens het afremmen hangt het schietlood *naar voren*, met $\tan\delta = \frac{4v}{gT}$.

b) Hier speelt de centrifugaalkracht de hoofdrol: $\vec{a}_{\text{cf}} = \left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right) \times \vec{\omega}$. De grootte van de versnelling is $R\omega^2 = R\left(\frac{\omega}{R}\right)^2 = \frac{v^2}{R}$, en de richting is naar buiten. Het schietlood hangt dus in *radiële richting naar buiten*, met $\tan\delta = \frac{v^2}{Rg}$.

c) De Coriolisversnelling is $\vec{a}_{\text{cor}} = 2\vec{v}\times\vec{\omega}$. De grootte hiervan bedraagt $2\Omega v\sin\theta$, met $\Omega = \frac{1}{86400}$/s de hoeksnelheid van de aardrotatie. Voor een naar het noorden vliegend vliegtuig op het noordelijk halfrond is deze vernelling naar *het oosten* gericht, met $\tan\delta = \frac{2\Omega v\sin\theta}{g}$. Wij konden de bijdrage van de centrifugaalkracht verwaarlozen omdat deze onafhankelijk van snelheid en richtig is en dus als een kleine correctie op $\vec{g}' = \vec{g} + \vec{a}_{\text{cf}} \approx \vec{g}$ en dus onze 'boven'-richting gezien kan worden.

d) Ontbind $\vec{a}_{\text{cor}}$ in twee componenten, afkomstig van de snelheidscomponenten $|v_N| = |v_O| = \frac{1}{\sqrt{2}}v$ van het vliegtuig naar het noorden en naar het oosten. De component v_N geeft, net als tevoren, een coriolisversnelling $\vec{a}^N - \sqrt{2}\Omega v\sin\theta\hat{e}_O$ naar rechts (oosten). De component v_O naar het oosten geeft een coriolisversnelling $\vec{a}^O = \sqrt{2}\Omega v\hat{\rho}$ weg van de rotatie-as! Zoals gevraagd verwaarlozen wij de verticale component, en de component langs het aardoppervlak (horizontale richting) is $\sqrt{2}\Omega v\sin\theta\hat{e}_Z$ naar het zuiden. Samen leveren ze een versnelling op van $2\Omega v\sin\theta$ naar het zuidoosten, dus evengroot als bij c en opnieuw naar 'rechts', met $\tan\delta = \frac{2\Omega v\sin\theta}{g}$.

e) In de gevonden uitdrukkingen voor $\tan\delta$ komt behalve de bekende snelheid van het vliegtuig, de tevens bekende zwaartekrachtsvernelling, en de rotatiesnelheid van de aarde, uitsluitend de poolhoek θ voor. Dat is het enige wat je uit de grootte van de scheefstand kunt afleiden. De richting van de scheefstand, links of rechts, vertelt je bovendien of je op het noordelijke of zuidelijke halfrond zit, maar dat kun je formeel beschouwen als informatie die al besloten ligt in het teken van δ en die daarom tot uiting komt in het teken van θ.

3 Hamiltoniaan

Een deeltje beweegt in een centraal krachtveld $\vec{F}(r,t) = -\frac{k}{r^2}e^{-\beta t}\hat{r}$ met k en β positieve constanten, t is de tijd, en r is de afstand van het deeltje tot het centrum. **[totaal: 15 pt]**

a) Vind de Hamiltoniaan $\mathcal{H}$ voor het deeltje. [6 pt]

b) Gebruik de Hamiltoniaan om een bewegingsvergelijking te vinden [5 pt]

c) Vergelijk de Hamiltoniaan met de totale energie van het deeltje. Waarom zijn deze gelijk/ongelijk? [2 pt]

d) Is de energie van het deeltje behouden? Gebruik een eenvoudige situatie als voorbeeld om te bespreken waarom (niet)? [2 pt]

Hint: *Gebruik je kennis van bewegingen in een centraal krachtveld om te bepalen, hoeveel coördinaten je nodig hebt!*

3.1 Solution

a) From our study of movement under a central force, we know that the problem is essentially two-dimensional, and we should use cylinder coordinates (r, ϕ). As the second question concerns the relationship between $\mathcal{H}$ and the total energy, we use the basic defintion

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

to find the Hamiltonian. The Lagrangian is given by $T - V$, where $V = -\frac{k}{r}\exp(-\beta t)$ and $T = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2$:

$$\begin{aligned} \vec{r} = r\cos\phi\hat{x} + r\sin\phi\hat{y} \Rightarrow \dot{\vec{r}} &= \left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\hat{x} + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\hat{y} \\ \dot{\vec{r}}^2 &= \dot{r}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) + r^2\dot{\phi}^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) + \cdots \\ & 2r\dot{r}\dot{\phi}\left(-\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi\right) \end{aligned}$$

We get the (expected) result $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r)$. From this we can calculate the conjugate impulses $p_r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}$ and $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$. The Hamiltonian is then defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \sum p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) = \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}e^{-\beta t} \end{aligned} \tag{3}$$

b) To find the equation of motion, we need to solve the Hamilton Equations:

$$\begin{array}{cc} -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial r} = \dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2}e^{-\beta t} & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_r} = \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} = \dot{p}_\phi = 0 & \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} = \frac{1}{m}\dot{p}_r = \frac{p_\phi^2}{m^2r^3} - \frac{k}{mr^2}e^{-\beta t} \\ p_\phi = mr^2\dot{\phi} = \text{const} \end{cases}$$

c) Despite the form and time dependance of the potential, the only requirement for $\mathcal{H}$ to represent the total energy is the choice of variables. Our variables are natural (*i.e.* not explicitly depending on time), therefore $\mathcal{H} = T + U$, as seen in equation 3.

d) The energy is not conserved, however it is only half right to point to the fact that the Hamiltonian is time dependent as proof. In principle the kinetic energy can make up a loss of potential energy! If we look at the Hamiltonian, however, we see that the potential is negative, and if we were to start with a bound orbit ($E < 0$), the kinetic energy would to eventually become negative to conserve the total energy. As this is obviously not possible, the energy can not conserved!

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$E = \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}{2\ell^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{rel}} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \qquad J_{ij} = I_{ij}^{\mathrm{cm}} + m\left(||\vec{a}||^2 \delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int dx \int dy \int dz\ \rho(x,y,z)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_0} = \dot{Q} + \Omega \times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{Q} + 2\Omega \times \dot{Q} + \Omega \times (\Omega \times Q)$$

$$\mathcal{L} = T - V \qquad \frac{\partial \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t), t\right)}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\vec{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \quad \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\Gamma}$$

$$\mathrm{Series}\left(\frac{1}{x^2}, x = r\right) = \frac{1}{r^2} - 2\frac{x-r}{r^3} + \mathcal{O}\left((x-r)^2\right)$$