

# Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 30 juni 2011

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!

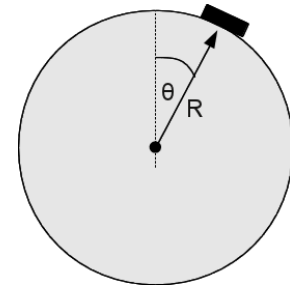
Gebruik per opgave een apart vel!

**Tip:** Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

## 1 Schijf op een bol

Een schijf met massa  $m$  balanceert bovenop een bol met straal  $R$ . De bol blijft bewegingsloos in dit probleem. De wrijvingskracht tussen de schijf en de bol is  $F_w = \gamma F_N$ , waarbij  $\gamma$  een positive constante is en  $F_N$  de normaalkracht is die de bol op de schijf uitoefent. De richting van de wrijvingskracht is tegengesteld aan de beweging van de schijf.

De schijf wordt langzaam vanaf de bovenkant van de bol geduwd, totdat de schijf vanzelf naar beneden glijdt onder de invloed van de zwaartekracht. [totaal: 10pt]

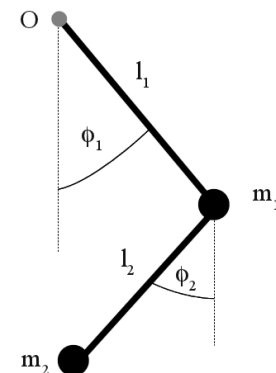


- Definieer en bereken alle krachten die op de schijf werken als de hoek vanaf de top van de bol  $\theta$  is en de snelheid  $v$ . [3 pt]
- Bereken de minimale hoek  $\theta_0$  waarbij de schijf begint te glijden onder z'n eigen gewicht. Wat geldt voor de maximale hoek  $\theta_1$  waarbij de schijf van de bol afvliegt? Beschrijf ook in woorden wat de fysische condities zijn waardoor deze hoeken bepaald worden. [2 pt]
- Gebruik de wet van behoud van energie om een differentiaalvergelijking op te stellen waaraan de snelheid  $v$  van de schijf als functie van de hoek  $\theta \leq \theta_1$  voldoet. Het is niet nodig de vergelijking op te lossen. [3 pt]
- Laat zien dat in de limiet  $\gamma \rightarrow 0$  de vergelijking  $v(h)^2 = 2g(R - h)$  voor een schijf en bol zonder wrijving een oplossing van de in (c) gevonden differentiaalvergelijking is. [2 pt]

## 2 Dubbele slinger

Een mathematische slinger met lengte  $l_1$  en massa  $m_1$  is bevestigd in punt  $O$ . Een tweede slinger met lengte  $l_2$  en massa  $m_2$  is bevestigd aan het eind van de eerste slinger. Alle verbindingen kunnen wrijvingsloos bewegen en kunnen massaloos verondersteld worden. [totaal: 15 pt]

- Formuleer de Lagrangiaan  $\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, t)$  die bij dit systeem hoort. (*Noot:* De Lagrangiaan bevat een groot aantal termen. Het kan makkelijk zijn om eerst een algemenere uitdrukking op te schrijven en vervolgens de termen apart uit te schrijven) [4 pt]
- Geef de bewegingsvergelijkingen voor  $\phi_1$  en  $\phi_2$ . [4 pt]

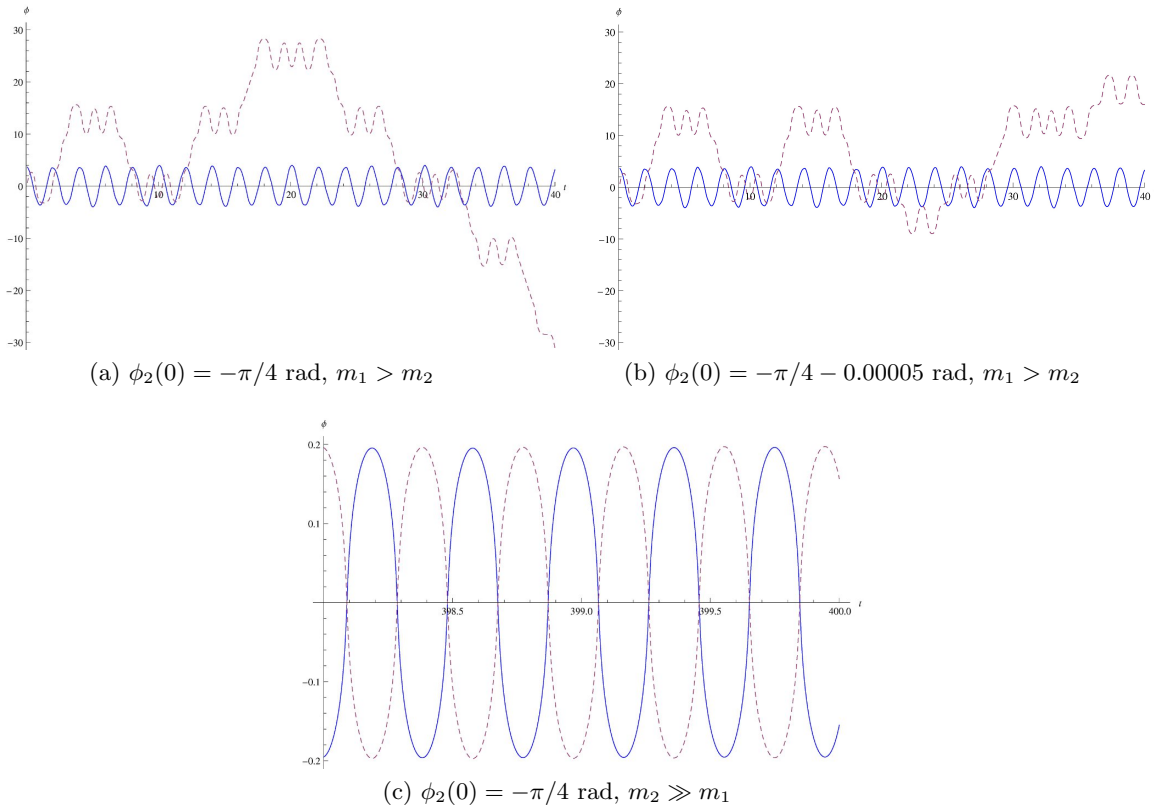


Gebruik vanaf nu de benadering  $l_1 = l_2 = 1$ .

(c) Beschouw het geval dat  $m_1 \gg m_2$ . Beschrijf de beweging van  $\phi_1$ . [3 pt]

(d) De dubbele slinger is een chaotisch systeem.

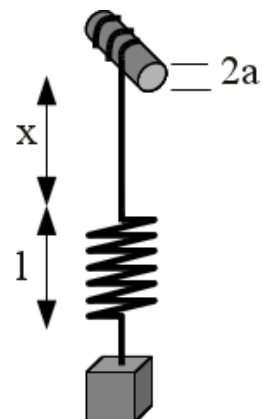
- i) Figuur 1 toont de coördinaten  $\phi_1$  en  $\phi_2$  als functie van de tijd. Welke karakteristieke eigenschap van een chaotisch systeem (bijzonder  $\phi_2$ ) is zichtbaar in (a) en (b)? Bespreek de gevolgen van deze eigenschap. Welke grootte/variabele beschrijft deze eigenschap? Definieer de grootte en leg uit wat voor waarden je verwacht voor chaotisch gedrag. [2 pt]
- ii) Gezien de resultaten van punt (c) en figuur 1(c), vind de ‘control parameter’ van een dubbele slinger met constante energie. Definieer ‘control parameter’ en leg uit welke waarden je verwacht voor niet-chaotisch en chaotisch gedrag. [2 pt]



Figuur 1:  $\phi_1$  en  $\phi_2$  (onderbroken lijn) als functie van de tijd voor een dubbele slinger. De begintoestanden van 1a en 1b zijn gelijk, met uitzondering van  $\phi_2(0)$ .

### 3 Katrol

Een massaloos koord is gewikkeld om een katrol met straal  $a$  en traagheidsmoment  $I$ . Aan het vrij hangende uiteinde van het koord is een massaloze veer van rustlengte 0 en veerconstante  $k$  bevestigd, en aan het uiteinde van deze veer hangt een blok met massa  $m$ . Onder invloed van de zwaartekracht zal het koord van de katrol worden afgewikkeld. De lengte van het hangende deel van het koord geven we aan met de coördinaat  $x$ , en de lengte van de veer met de coördinaat  $l$  (zie figuur). [totaal: 15 pt]



- (a) Laat zien dat de kinetische energie behorend bij de rotatie van de katrol gelijk is aan  $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I \left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2$ . Geef ook een uitdrukking voor de kinetische energie behorend bij de daling van het blok. [3 pt]
- (b) Wat is de potentiële energie van dit systeem? [2 pt]
- (c) Schrijf de Lagrangiaan op van dit systeem en geef uitdrukkingen voor de ggeneraliseerde impulsen  $p_x$  en  $p_l$ . [2 pt]
- (d) Leid de Lagrangevergelijkingen af voor  $x$  en  $l$ . [2 pt]

Na eliminatie van de tweede afgeleide  $\ddot{x}$  uit de twee Lagrangevergelijkingen van (d) krijgen we een enkele bewegingsvergelijking voor  $l$ , van de vorm  $\ddot{l} = C - \omega^2 l$ .

- (e) Geef een uitdrukking voor de oscillatiefrequentie  $\omega$  en de constante  $C$ . Leid ook af hoe groot de waarde  $l_0$  is van  $l$  in evenwicht. [3 pt]

Een van de mogelijke oplossingen voor  $l$  luidt  $l = l_0 + A \cos \omega t$ , met vrij te kiezen amplitude  $A$  ( $A < l_0$ , zodat het koord wel voortdurend gespannen staat).

- (f) Geef voor dit geval de oplossing voor  $x(t)$ , met begincondities  $x(0) = 0$  en  $\dot{x}(0) = 0$ . [3 pt]

## 4 Solutions

**Let op:** De uitwerkingen hieronder zijn in eerste instantie bedoeld als geheugensteun bij het nakijken en daarom soms wat bonding (of zelfs incompleet). Op het tentamen is het ook belangrijk dat je aangeeft dat je begrijpt wat je doet. Daarvoor is soms extra tekst of uitleg nodig.

### 4.1 Puck On Sphere - Solution

- (a) The forces acting on the puck are the force by gravity  $-F_g \hat{y} = F_g (\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$ , the friction force  $F_w = -\gamma F_N \hat{\theta}$ , and the normal force from the sphere  $F_N \hat{r} = F_{g,r} - \frac{mv(\theta)^2}{R} \hat{r}$ .
- (b) At  $\theta_0$ , the tangential component of the force due to gravity  $F_{g,t} = mg \sin \theta$  has to be equal to the friction force  $\gamma F_N$ .

$$F_N = mg \cos \theta_0 - \underbrace{\frac{mv(\theta_0)^2}{R}}_{=0} \quad (1)$$

$$F_{g,t} = mg \sin \theta_0 = \gamma mg \cos \theta_0 \quad (2)$$

$$\tan \theta_0 = \gamma \quad (2)$$

$$\theta_0 = \arctan \gamma \quad (3)$$

At  $\theta_1$  the normal force has to be zero.

$$mg \cos \theta_1 - \frac{mv(\theta_1)^2}{R} = 0 \quad (4)$$

- (c) The kinetic energy of the puck at angle  $\theta \leq \theta_1$  comes from the loss of potential energy relative to the original position  $\theta_0$ , minus the work done by friction along the way:

$$\frac{mv(\theta)^2}{2} = mgR (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} F_R R d\theta' \quad (5)$$

$$\frac{mv(\theta)^2}{2} = mgR (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} \gamma R \left( mg \cos \theta' - \frac{mv(\theta')^2}{R} \right) d\theta' \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{mv(\theta)^2}{2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( mgR (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \int_{\theta_0}^{\theta} \gamma R \left( mg \cos \theta' - \frac{mv(\theta')^2}{R} \right) d\theta' \right) \quad (7)$$

$$mv(\theta)v'(\theta) = mgR \sin \theta - \gamma R mg \cos \theta + m\gamma v(\theta)^2 \quad (8)$$

$$v(\theta) (v'(\theta) - \gamma v(\theta)) = gR (\sin \theta - \gamma R \cos \theta) \quad (9)$$

- (d)  $v(h)$  can be rewritten in terms of  $\theta$  as  $v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}$ :

$$\frac{\partial v(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2gR(1 - \cos \theta)}} \cdot 2gR \sin \theta = \frac{gR \sin \theta}{v(\theta)}.$$

Setting  $\gamma = 0$  in 9 and substituting  $v'(\theta)$  with the above directly shows the wanted equality.

## 4.2 Double Pendulum - Solution

- (a) To find the kinetic and potential energy for the Lagrangian  $\mathcal{L} = T - U$ , we need to first calculate the position of the two masses as a function of  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , and  $t$ :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin \phi_1 \\ -l_1 \cos \phi_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2 \\ -l_1 \cos \phi_1 - l_2 \cos \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 + l_2 \begin{pmatrix} \sin \phi_2 \\ -\cos \phi_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

For the potential energy we can directly use the  $y$  components  $U = g(m_1 y_1 + m_2 y_2)$ :

$$U = -g((m_1 + m_2)(l_1 \cos \phi_1) + m_2 l_2 \cos \phi_2), \quad (12)$$

while for the kinetic energy  $T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{x}}_2^2$  we need to first differentiate with respect to time:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \\ l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 \\ l_1 \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1 + l_2 \dot{\phi}_2 \begin{pmatrix} \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Collecting the terms, using the sum rules of sine and cosine, we find:

$$\dot{\mathbf{x}}_1^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2^2 = l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 \quad (16)$$

- (b) To find the equation of motion for  $\phi_1$ , we use the Euler-Lagrange-equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - g(m_1 + m_2) l_1 \sin \phi_1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} &= \frac{d}{dt} \left( (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \\ &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{l_2}{l_1} \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - \frac{g}{l_1} \sin \phi_1 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - g m_2 l_2 \sin \phi_2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} &= \frac{d}{dt} \left( m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \\ &= m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\frac{l_1}{l_2} \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \frac{l_1}{l_2} \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) - \frac{g}{l_2} \sin \phi_2 \quad (22)$$

- (c) If  $m_1 \gg m_2$ , and  $l_1 \sim l_2$ , the terms containing  $\ddot{\phi}_2$  and  $\dot{\phi}_2$  become negligible as  $\frac{m_2}{m_1+m_2} \frac{l_2}{l_1} \rightarrow 0$ , and we find that  $\phi_1$  moves as if there was no second pendulum:

$$\ddot{\phi}_1 = - \underbrace{\frac{g}{l_1}}_{\omega_0^2} \sin \phi_1.$$

This is actually visible in figure 1, which shows a very regular movement of  $m_1$ , while  $m_2$  moves chaotically.

- (d) Question on chaotic behaviour

- i) A chaotic system is sensitive to initial conditions. Over time, the deviation  $\Delta\phi_2$  of the angle for two systems evolving from slightly different starting points will grow exponentially. The quantity defining this is the Liapunov coefficient.  $|\Delta\phi(t)| \sim Ke^{\lambda t}$ . Positive values of  $\lambda$  are expected, as the solutions diverge.
- ii) A control parameter determines whether a system is behaving chaotically. Generally, for small values of the control parameter the system is periodic; raising the control parameter will introduce (sub)harmonics until chaotic motion appears. The questioning leads you to identify the control parameter with  $m_1/m_2$ ; for small values (figure 1c we observe periodic motion, for large values (figure 1a and (b)) we find chaotic motion of at least one of the pendula.

### 4.3 Katrol - Solution

- (a)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2$$

$$T_{\text{trans}} = \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{l})^2$$

- (b)

$$U = -mg(x+l) + \frac{1}{2}kl^2$$

Voor het gemak is hier de rustlengte van de veer op nul gesteld.

- (c) Langrangiaan:  $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + \dot{l})^2 + mg(x+l) - \frac{1}{2}kl^2$   
 Gegeneraliseerde impulsen:  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{I\dot{x}}{a^2} + m(\dot{x} + \dot{l})$  en  $p_l = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = m(\dot{x} + \dot{l})$ .

- (d) De Lagrangevergelijkingen voor  $x$  en  $l$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow \left(\frac{I}{a^2} + m\right)\ddot{x} + m\ddot{l} - mg = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} \Rightarrow m\ddot{x} + m\ddot{l} - mg + kl = 0 \quad (24)$$

(e)  $\left(\frac{I}{ma^2} + 1\right)$  maal 24 aftrekken van 23 levert:

$$\left(m\ddot{l} - mg\right) \left(1 - \left(\frac{I}{ma^2} + 1\right)\right) - kl \left(\frac{I}{ma^2} + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{l} = g - \underbrace{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{ma^2}{I}\right)}_{\omega^2} l \quad (25)$$

“Evenwicht” betekent dat de veer niet oscilleerd, dus  $\ddot{l} = 0$  of  $l_0 = \frac{g}{\omega^2}$ .

(f) Trek de twee Lagrangevergelijkingen 23 en 24 direct van elkaar af:

$$\ddot{x} = \frac{kla^2}{I} = \frac{ka^2}{I} (l_0 + A \cos \omega t) \quad (26)$$

$$\dot{x} = \dot{x}(0) + \frac{ka^2}{I} \left(l_0 t + \frac{A}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$x = \dot{x}(0)t + \frac{ka^2}{I} \left(\frac{1}{2}l_0 t^2 + \frac{A}{\omega^2} \cos \omega t\right) + const \quad (27)$$

Na invullen van de begincondities:

$$x(t) = \frac{ka^2}{I\omega^2} \left(\frac{1}{2}gt^2 + A(1 - \cos \omega t)\right). \quad (28)$$