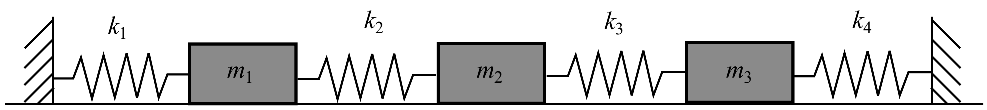
Tentamen Mechanica 2

NS-350B, Blok 3, 18 April 2013

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**.
Gebruik per opgave een **apart vel**.
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag.

1 Drie gekoppelde oscillatoren



Figuur 1: Drie oscillatoren

We beschouwen een systeem van drie gekoppelde oscillatoren, met massa's m_1, m_2 en m_3, en vier veren met veerconstanten k_i, zie de figuur hierboven. De massa's hebben elk maar één vrijheidsgraad, de uitwijkingen van de massa's zijn gegeven door x_1, x_2, x_3; voor $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ zijn de veren op rustlengte. **[14 pt]**

a) De bewegingsvergelijkingen kunnen in matrixvorm geschreven worden als:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

met

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Geef $\mathbf{K}$ in termen van de veerkonstanten k_i [4 pt].

b) We rekenen nu verder met gelijke massa's m en veerkonstanten k. Vereenvoudig de uitdrukking voor $\mathbf{K}$ voor dit geval [2 pt].

c) Ga nu uit van een probeeroplossing van de vorm $x_i = \cos \omega t$. Invullen in de bewegingsvergelijkingen geeft een stelsel van drie karakteristieke vergelijkingen. Laat zien dat dit stelsel alleen oplossingen heeft als: [4 pt]

$$(2k^{\cancel{2}} - m\omega^2)(2k^2 - 4km\omega^2 + m^2\omega^4) = 0$$

d) Wat zijn de eigenfrequenties van het systeem en de bijbehorende eigenmodes? (Tip: als je niet zeker bent van je antwoord bij de eerste onderdelen kan je hier ook gebruik maken van mechanisch inzicht en het feit dat de eigenmodes vectoren zijn die loodrecht op elkaar staan.) [4 pt]

Oplossing

a) Schrijf de krachten op elke massa uit. Bijv voor m_1:

$$F_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

De matrix $\mathbf{K}$ is dan:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

b) Voor gelijke $k_i = k$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

c) De volledige probeeroplossing heeft de vorm:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\cos(\omega t - \delta) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \delta)$$

Invullen in de bewegingsvergelijking geeft:

$$-\boldsymbol{M}\omega^2 \boldsymbol{a}\cos(\omega t - \delta) = -K\boldsymbol{a} cos(\omega t - \delta)$$

Dit stelsel heeft alleen niet-triviale oplossingen als $\det \mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 = 0$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{K} - \mathbf{M}\boldsymbol{\omega^2} &= (2k - m\omega^2)((2k - m\omega^2)^2 - k^2) - k^2(2k - m\omega^2) \\ &= 4k^3 + 10k^2 m\omega^2 + 6km^2\omega^4 - m^3\omega^6 \\ &= (2k - m\omega^2)(2k^2 - 4km\omega^2 + m^2\omega^4) \end{aligned}$$

Bonuspunt: De eenheid van k en $m\omega^2$ is gelijk $\mathrm{kg\,s^{-2}}$, $2k^2 - m\omega^2$ heeft dus inconsistente eenheden.

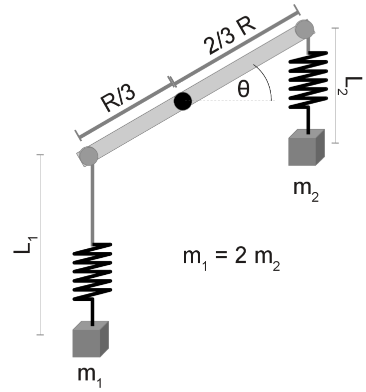
d) De eigenfrequenties zijn de nulpunten van de bovenstaande vergelijking:

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{2\frac{k}{m}} \qquad \omega_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}}$$

en de bijbehorende eigenmodes χ zijn:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) \\ \chi_2 &= A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \\ \chi_3 &= A_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_3 t - \delta_3) \end{aligned}$$

2 Balans met Veren



Twee veren met gelijke veerkonstante k zitten vast aan een massaloze staaf. De veren kunnen alleen in de verticale (y) richting bewegen. Een grotere massa $m_1 = 2m_2$ is opgehangen op een afstand $\frac{1}{3}R$ van de draaias en een kleinere massa m_2 is op een afstand $\frac{2}{3}R$ opgehangen. **[13 pt]**

(a) Bepaal de totale potentiële energie V en de totale kinetische energie T van dit systeem als functie van de hoek θ en de uitwijking van de twee veren L_1 en L_2, en laat zien dat V niet van θ afhankelijk is. [4 pt]

(b) Bepaal de bewegingsvergelijkingen voor L_1 en L_2 met behulp van de Euler-Langrangevergelijkingen. Leg uit hoe je aan de vergelijkingen ziet dat de bewegingen van L_1 en L_2 gekoppeld zijn, ook al zijn er geen kruistermen met L_1 en L_2. [6 pt]

(c) Beargumenteer dat er geen stabiele, niet-triviale[1], stationaire oplossing bestaat, dwz. $\dot{\theta}(t) = 0$ voor alle t. Zou een stationaire oplossing kunnen bestaan als $m_2 = m_1$? (niet uitwerken, alleen aangeven waarom het wel/niet zou kunnen) [3 pt]

2.1 Oplossing

(a) Potentiële energieën:

$$\begin{aligned} U_1 &= m_1 g h_1 = m_1 g \left(-\frac{1}{3} R \sin\theta - L_1 \right) + \tfrac{1}{2} k L_1^2 && (1) \\ U_2 &= m_2 g h_2 = m_2 g \left(\frac{2}{3} R \sin\theta - L_2 \right) + \tfrac{1}{2} k L_2^2 && (2) \\ U &= U_1 + U_2 = 0 - m_2 g \left(2L_1 + L_2 \right) + \tfrac{1}{2} k \left(L_1^2 + L_2^2 \right) && (3) \end{aligned}$$

Kinetische energieën:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right) && (4) \\ & \qquad x_1 = -\frac{1}{3} R \cos\theta \qquad \dot{x}_1 = \frac{1}{3} R\dot{\theta} \sin\theta \\ & \qquad y_1 = -\frac{1}{3} R \sin\theta - L_1 \qquad \dot{y}_1 = -\frac{1}{3} R\dot{\theta} \cos\theta - \dot{L}_1 \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{1}{9} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} R\dot{\theta} \dot{L}_1 \cos\theta + \dot{L}_1^2 \right) && (5) \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right) && (6) \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{4}{9} R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{4}{3} R\dot{\theta} \dot{L}_2 \cos\theta + \dot{L}_2^2 \right) && (7) \\ T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2}{3} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{4}{3} R\dot{\theta} \cos\theta \left(\dot{L}_1 - \dot{L}_2 \right) + 2\dot{L}_1^2 + \dot{L}_2^2 \right) && (8) \end{aligned}$$

[1] Een triviale oplossing is een oplossing waarbij *alle* snelheden nul zijn

(b) Wij berekenen de Lagrangiaan ($m_2 \to m$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{4}{3}R\dot{\theta}\left(\dot{L}_1 - \dot{L}_2\right)\cos\theta + 2\dot{L}_1^2 + \dot{L}_2^2\right) + mg\left(2L_1 + L_2\right) - \frac{1}{2}k\left(L_1^2 + L_2^2\right)$$

en gebruiken de Euler-Lagrange vergelijkingen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} &= 2mg - kL_1 && (9)\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}_1} &= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}R\dot{\theta}\cos\theta + 4\dot{L}_1\right)\\
&= \frac{2m}{3}R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + 2m\ddot{L}_1 && (10)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} &= mg - kL_2 && (11)\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{L}_2} &= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(-\frac{4}{3}R\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{L}_2\right)\\
&= -\frac{2m}{3}R\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + m\ddot{L}_2 && (12)
\end{aligned}$$

De bewegingsverglijkingen bevatten de term $\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta$ en zijn door deze gekoppeld.

(c) Als de balk vast staat zouden wij een "natuurlijke" trilling van de veren verwachten (de bewegingsverglijkingen voor L_1 en L_2 zonder θ termen geven een harmonische trilling). Omdat $m_1 \neq m_2$ verschillen de frequenties - er kan dus nooit een blijvend evenwicht heersen. Als $m_1 = m_2$ kan er in principe en stationaire oplossing bestaan met $\theta = -\frac{\pi}{2}$ als de veren in fase trillen.

3 Slinger in Drie Dimensies

Beschouw een massa m aan het einde van een starre, massaloze staaf van lengte l, die zo opgehangen is dat de massa in drie dimensies kan bewegen onder invloed van de zwaartekracht (dus niet alleen in één vlak). Gebruik sferische coördinaten om de positie van de massa te specificeren, met θ de poolhoek, ϕ de azimutale hoek, en $r = l =$ const de straal. Neem $\theta = 0$ als de slinger verticaal hangt (negatieve z-richting). [**13 pt**]

(a) Stel de Lagragiaan op in termen van θ en ϕ en geef de bewegingsvergelijkingen. [6 pt]

(b) Wat zijn "negeerbare coördinaten" (*ignorable coordinates*) en hoe komen ze tot uitdrukking in het Lagrangeformalisme? [2 pt]

(c) In dit systeem is de verticale component L_z van de impulsmomentvector behouden. Geef L_z in termen van de gegeneraliseerde coördinaten. Geef ook aan hoe uit de bewegingsvergelijkingen blijkt dat L_z behouden is.[2 pt]

(d) Gebruik nu het feit dat L_z behouden is om te laten zien dat er een hoek θ_o is waarbij θ constant is. Geef het verband tussen θ_o en L_z en vervolgens θ_o als functie van (o.a.) $\dot{\phi}$. De bijbehorende beweging wordt ook wel de conische slinger genoemd. [3 pt]

Oplossing

(a) It is advisable to draw a picture yourself to get a feel for the geometry of the problem. We use suitable spherical coordinates $\mathbf{x} = (x, y, z) = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$ where $\theta = 0$ means the pendulum is at the south-pole (0,0,-1). We have

$$\dot{\mathbf{x}} = R\begin{pmatrix}\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\\ \dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\\ \dot\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

where R is the length of the pendulum.

The height of the pendulum with respect to the x-y plane is $-R\cos\theta$, hence the gravitational potential energy is $U_{gr} = -mgR\cos\theta$ when we put the zero of the potential at the $\theta = \pi/2$-plane. Note that it correctly increases as θ increases.

The kinetic energy is $\frac{1}{2}m||\dot{\mathbf{x}}||^2$:

$$\begin{aligned}
||\dot{\mathbf{x}}||^2/R^2 &= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\right)^2 + \left(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\right)^2 + \left(\dot\theta\sin\theta\right)^2\\
&= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\phi\right)^2 + \left(\dot\phi\sin\theta\sin\phi\right)^2 + \left(\dot\theta\cos\theta\sin\phi\right)^2 + \left(\dot\phi\sin\theta\cos\phi\right)^2 + \left(\dot\theta\sin\theta\right)^2\\
&= \left(\dot\theta\cos\theta\right)^2 + \left(\dot\phi\sin\theta\right)^2 + \left(\dot\theta\sin\theta\right)^2\\
&= \dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

so the Lagrangian is

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m||\dot{\mathbf{x}}||^2 - U_{gr}\\
&= \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + mgR\cos\theta.
\end{aligned}$$

Euler-Lagrange equations:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &\quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot\phi\sin^2\theta\right) = 0\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} &\quad\Rightarrow\quad mR^2\ddot\theta = mR^2\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta
\end{aligned}$$

(b) Een negeerbare coördinaat is een coördinaat die bij een behouden grootheid hoort. De bewegingsvergelijkting heeft de vorm $\frac{d}{dt}p_q = 0$.

(c) De afstand van de massa to de z-as is $R\sin\theta$, dus:

$$L_z \equiv mR^2\dot\phi\sin^2\theta.$$

De ϕ-vergelijking heeft de vorm:

$$\frac{d}{dt}L_z = 0$$

(d) De bewegingsvergelijking voor θ kan dan geschreven worden als:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{L_z^2}{m^2R^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0$$

Voor vaste $\theta = \theta_\text{o}$ moet gelden dat $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, dus:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\sin\theta_\text{o} + \frac{L_z^2}{m^2R^4}\frac{\cos\theta_\text{o}}{\sin^3\theta_\text{o}} = 0$$

en dus

$$\frac{\cos\theta_\text{o}}{\sin^4\theta_\text{o}} = \frac{m^2gR^3}{L_z^2}$$

en met $L_z^2 = m^2\dot{\phi}^2\sin^4\theta R^4$:

$$\cos\theta_\text{o} = \frac{g}{R\dot{\phi}_\text{o}^2}$$

De beweging van de slinger met het touw vormt (de top van) inderdaad een kegel.

Alternatieve methode: In order to remain on a fixed-θ orbit, the sum of centrifugal and gravitational force need to pull along the support. From similar triangles we see that $\frac{mg}{mr\omega^2} = \frac{Rcos\theta_0}{r}$. Identify ω with $\dot{\phi}$, and we confirm the result.

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \delta S = \delta\int_1^2 \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0$$

$$f_{\text{cstr},j}(q_i) = 0 \qquad \mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_{\text{cstr},j}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$