Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 4 juli 2013

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!
Gebruik per opgave een apart vel!
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

1 Larmorprecessie

Beschouw een twee-lichamenprobleem met twee geladen deetjes (lading q_i en massa m_i, $i = 1, 2$). De interactie door de zwaartekracht tussen deze deeltjes kan verwaarloosd worden. **[totaal: 20 pt]**

± a) Onder welke voorwaarden kan dit probleem klassiek benaderd worden? (Anders gezegd: van welke grens van de klassieke mechanica moeten wij afblijven, kunnen wij dit doen, en zo ja, hoe?) [2 pt]

± b) Vind en schets de effectieve potentiaal U_{eff} voor het geval (i) dat alle $q_i > 0$, en (ii) dat $q_1 < 0 < q_2$. Welke banen (orbits) zijn mogelijk in elk geval? [4 pt]

Beschouw nu het speciale geval dat $q_1 = -q < 0$ en $q_2 = Q > 0$. De positie van q_2 is vast, q_1 bevindt zich in een gebonden baan, en de beweging vindt plaats in een zwak, uniform magneetveld $\vec{B}$.

± c) Vind de bewegingsvergelijking (differentiële vorm) voor de lading q_1. Definieer alle gebruikte grootheden en richtingen van kracht(en)! [Hint: een slimme keuze van coördinatenstelsel maakt dit makkelijker] [3 pt]

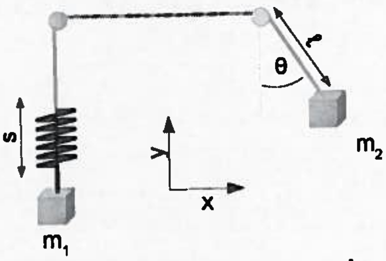
± d) Herschrijf de bewegingsvergelijking in een coördinatenstelsel dat met een vaste hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ om q_2 roteert. Wat zijn de fysische en wiskundige effecten van deze transformatie? [6 pt]

e) Voor een bepaalde waarde van $\vec{\Omega}$ kan je het (zwak!) magneetveld in de bewegingsvergelijkingen in het niet-inertiaal-stelsel verwaarlozen. [Hint: termen van $\mathcal{O}(|\vec{B}|)$ mag je niet verwaarlozen!]

(i) Vind deze waarde van $\vec{\Omega}$ (richting en grootte!) en de resulterende bewegingsvergelijking. [3 pt]

(ii) Beschrijf de vorm van een (periodieke) baan van q_1 in allebei de coördinatenstelsels. [2 pt]

2 Machine van Atwood met veer



Twee massa's m_1 en m_2 zijn verbonden door een massaloos touw van lengte L dat over wrijvingsvrije ophangpunten loopt. Tussen massa 1 en het touw zit een ideale veer met veerconstante k; massa 1 kan alleen in de verticale y-richting bewegen; massa 2 beweegt in het vlak van tekening. De uitrekking s van de veer is gemeten t.o.v. het evenwichtspunt (dus niet vanuit de lengte van de veer zonder kracht).

De bewegingen vinden zodanig plaats dat wij met botsingen tussen massa's of massa en ophangpunt(en) geen rekening hoeven te houden. **[totaal: 20 pt]**

a) Bereken de potentiële energie U en kinetische energie T van dit systeem. [5 pt]

b) Bereken de Lagrangiaan en de gegeneraliseerde impulsen p_ℓ, p_s en p_θ. [3 pt]

c) Vind de Hamiltionaan $\mathcal{H}(\ell, s, \theta, p_\ell, p_s, p_\theta)$ en laat zien dat de Hamiltoniaan gelijk is aan $T + U$. [8 pt]

d) Wat is de behouden grootheid in het systeem die *niet* met een negeerbare coördinaat samenhangt? [1 pt]

e) Het Hamiltonformalisme ($\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$) en de mechanica van Newton zijn equivalent, maar toch is het vaak handiger de een of de ander te gebruiken. Geef een voorbeeld van een mechanisch systeem waar het voordeliger (i) en een waar het nadeliger (ii) is het Hamiltonformalisme toe te passen dan de mechanica van Newton. Beargumenteer kort de reden(en) voor je keuze. [3 pt]

3 Satellietbaan

Beschouw een satelliet met massa m in een cirkelvormige baan rond de aarde (massa $M \gg m$) met straal R. **[totaal: 20 pt]**

(a) Geef de snelheid v_0 van de satelliet. [2 pt]

(b) De satelliet moet worden verplaatst naar een hogere baan, met straal $2R$. Dit kan via een elliptische transferbaan. Schets de situatie en bereken de impulsverandering die nodig is om over te gaan op de transferbaan en van de transferbaan in de hogere baan. [6 pt]

(c) De raketaandrijving wordt per ongeluk geactiveerd, waardoor de snelheid van de satelliet toeneemt met Δv in de radiële richting naar buiten (van de aarde af). Geef de energie en het impulsmoment voor en na de verandering van snelheid. [2 pt]

(d) Laat zien dat voor een satelliet in een ellipsbaan, de energie het meest efficiënt vergroot kan worden door een extra voortstuwing in de bewegingsrichting op het moment dat de satelliet zich in het perigeum (punt van de baan het dichtst bij de aarde) bevindt. [4 pt]

(e) De satelliet heeft door de aanwezigheid van zonnepanelen en antennes een onregelmatige vorm. Hoeveel verschillende hoofdtraagheidsmomenten heeft de satelliet? [2 pt]

(f) De baanverandering in onderdeel (c) wordt veroorzaakt door twee stuurraketjes aan de zijkant van de satelliet. Beschrijf de beweging die de satelliet zou krijgen als er maar een stuurraketje was, of als een van de twee raketjes minder goed werkt. Geef duidelijk aan hoe je tot je antwoord komt. Geef aan waar de stuurraketjes het best kunnen zitten om de satelliet zo bestuurbaar mogelijk te houden. [4 pt]

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\arcsin(\gamma)) = \sqrt{1-\gamma^2} \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi+\beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1, \quad \vec{F}_{\text{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu} \quad E = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}\left(\epsilon^2-1\right) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad \frac{c_1}{1+\epsilon_1\cos(\phi+\delta_1)} = \frac{c_2}{1+\epsilon_2\cos(\phi+\delta_2)}$$

$$U_{\text{cf}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \qquad \mathcal{L}_{\text{rel}} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \qquad J_{ij} = I_{ij}^{\text{cm}} + m\left(||\vec{a}||^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

$$I = \iiint dV\ \rho(x,y,z)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_o} = \dot{Q} + \Omega\times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_o} = \ddot{Q} + 2\Omega\times\dot{Q} + \Omega\times(\Omega\times Q)$$

$$\mathcal{L} = T - V \qquad \frac{\partial\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)}{\partial\dot{q}} = 0$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\vec{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \quad \dot{\vec{L}} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{\Gamma}$$

$$\text{Series}\left(\frac{1}{x^2}, x = r\right) = \frac{1}{r^2} - 2\frac{x-r}{r^3} + \mathcal{O}\left((x-r)^2\right)$$

$\mathbf{A}$ is positief definiet: $\forall x \in \mathbb{R}^3 :\ (x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x) > 0$