Tentamen Mechanica 2

Blok 4, 4 juli 2013

Vermeld op elk blad duidelijk je **naam** en **collegekaartnummer**!
Gebruik per opgave een apart vel!
Tip: Lees eerst alle vragen rustig door, begin met de vraag die je het makkelijkst vindt, besteed niet teveel tijd aan één vraag!

1 Larmorprecessie

Beschouw een twee-lichamenprobleem met twee geladen deetjes (lading q_i en massa m_i, $i = 1, 2$). De interactie door de zwaartekracht tussen deze deeltjes kan verwaarloosd worden. [**totaal: 20 pt**]

a) Onder welke voorwaarden kan dit probleem klassiek benaderd worden? (Anders gezegd: van welke grens van de klassieke mechanica moeten wij afblijven, kunnen wij dit doen, en zo ja, hoe?) [2 pt]

b) Vind en schets de effectieve potentiaal U_{eff} voor het geval (i) dat alle $q_i > 0$, en (ii) dat $q_1 < 0 < q_2$. Welke banen (orbits) zijn mogelijk in elk geval? [4 pt]

Beschouw nu het speciale geval dat $q_1 = -q < 0$ en $q_2 = Q > 0$. De positie van q_2 is vast, q_1 bevindt zich in een gebonden baan, en de beweging vindt plaats in een zwak, uniform magneetveld $\vec{B}$.

c) Vind de bewegingsvergelijking (differentiële vorm) voor de lading q_1. Definieer alle gebruikte grootheden en richtingen van kracht(en)! [Hint: een slimme keuze van coördinatenstelsel maakt dit makkelijker] [3 pt]

d) Herschrijf de bewegingsvergelijking in een coördinatenstelsel dat met een vaste hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ om q_2 roteert. Wat zijn de fysische en wiskundige effecten van deze transformatie? [6 pt]

e) Voor een bepaalde waarde van $\vec{\Omega}$ kan je het (zwak!) magneetveld in de bewegingsvergelijkingen in het niet-inertiaal-stelsel verwaarlozen. [Hint: termen van $\mathcal{O}(|\vec{B}|)$ mag je niet verwaarlozen!]

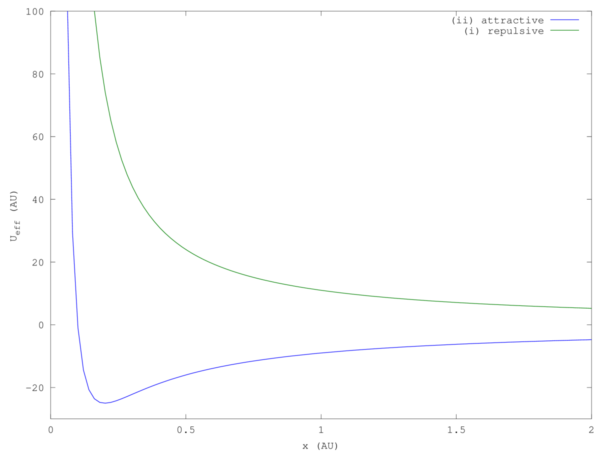
   (i) Vind deze waarde van $\vec{\Omega}$ (richting en grootte!) en de resulterende bewegingsvergelijking. [3 pt]

   (ii) Beschrijf de vorm van een (periodieke) baan van q_1 in allebei de coördinatenstelsels. [2 pt]

1.1 Solution

a) Wij veronderstellen dat wij het niet met kleine elementaire ladingen op kleine, atomaire afstand te doen hebben, anders zouden wij *kwantummechanica* moeten toepassen. Omdat wij de zwartekracht kunnen verwaarlozen, zijn *relativitische* effecten niet belangrijk (maar toch één punt waard)

b) De potentiaal is gegeven door $U_{\text{eff}} = U(r) + U_{\text{cf}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$. Een schets van de twee gevallen is in figuur 1. In (i) is er geen minimum van het potentiaal, dus is alleen een open baan (hyperbool) mogelijk. Anders in geval (ii) waar ook “closed orbits”, dus cirkel of ellips, mogelijk zijn.



Figuur 1: Potentiaal voor het twee-lichamen probleem van twee geladen deeltjes met lading met (i) gelijk of (ii) ongelijk teken.

c) De bewegingsvergelijking (in cilindercoordinaten $\mathbf{r}$, maar ook algemein) is

$$m_1 \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{S_o} = F = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r} - q\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{S_o} \times \vec{B}$$

De eerste term is een elektrostatische kracht, aantrekkend in de radiële richting. De tweede term is de Lorentzkracht, loodrecht op beweging en magneetveld.

d) Wij moeten de tijdsafgeleiden vervangen, omdat $\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{S_o} = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a}$ (waar $\dot{\mathbf{a}}$ de tijdsafgelijde in het niet-inertiaalsysteem is). Wij vinden dus

$$\begin{aligned} m_1\left(\ddot{\mathbf{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \mathbf{r}\right) &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r} - q\left(\dot{\mathbf{r}} + \vec{\Omega} \times \mathbf{r}\right) \times \vec{B} \\ m_1\ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r} - q\dot{\mathbf{r}} \times \vec{B} + 2m_1\dot{\mathbf{r}} \times \vec{\Omega} - q\vec{\Omega} \times \mathbf{r} \times \vec{B} + m_1\vec{\Omega} \times \mathbf{r} \times \vec{\Omega} \end{aligned}$$

Natuurkundig hebben wij twee "schijnkrachten", de centrifugaalkracht $m(\Omega \times r) \times \Omega$ en de Coriolis kracht $2m\dot{r} \times \Omega$; wiskundig is de definitie van de tijdsafgelijde aangepasst omdat het (niet-inertiële) coördinatenstelsel van de tijd afhangt ($\ddot{r} + 2\Omega \times \dot{r} + \Omega \times \Omega \times r$).

e) Omdat wij termen met $\vec{B}$ niet mogen verwaarlozen moeten wij een waarde voor $\vec{\Omega}$ vinden waar de term $\dot{\mathbf{r}} \times \vec{B}$ wegvallt. Dus vinden wij

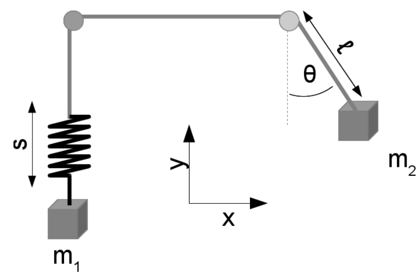
$$\vec{\Omega} = \frac{q}{2m_1}\vec{B}$$

of wel parallel $\vec{B}$ met grootte $\frac{q}{2m_1}$. De bewegingsvergelijking wordt

$$m_1\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_o r^2}\hat{r} - 0 - \underbrace{\frac{q^2}{4m_1}\vec{B} \times \mathbf{r} \times \vec{B}}_{\mathcal{O}(B^2)\to 0}$$

Dit is een beweging van q_1 in een centraal krachtveld zonder verstoring door het magneetveld. Dus de baan in het niet-inertiaalsysteem is een cirkel of ellips; in het inertiaalsysteem is het een cirkel of een ellips waarvan het apofocus met constante hoeksnelheid $\vec{\Omega}$ roteerd.

2 Machine van Atwood met veer



Twee massa's m_1 en m_2 zijn verbonden door een massaloos touw van lengte L dat over wrijvingsvrije ophangpunten loopt. Tussen massa 1 en het touw zit een ideale veer met veerconstante k; massa 1 kan alleen in de verticale y-richting bewegen; massa 2 beweegt in het vlak van tekening. De uitrekking s van de veer is gemeten t.o.v. het evenwichtspunt (dus niet vanuit de lengte van de veer zonder kracht).

De bewegingen vinden zodanig plaats dat wij met botsingen tussen massa's of massa en ophangpunt(en) geen rekening hoeven te houden. **[totaal: 20 pt]**

a) Bereken de potentiële energie U en kinetische energie T van dit systeem. [5 pt]

b) Bereken de Lagrangiaan en de gegeneraliseerde impulsen p_ℓ, p_s en p_θ. [3 pt]

c) Vind de Hamiltionaan $\mathcal{H}(\ell, s, \theta, p_\ell, p_s, p_\theta)$ en laat zien dat de Hamiltoniaan gelijk is aan $T + U$. [8 pt]

d) Wat is de behouden grootheid in het systeem die *niet* met een negeerbare coördinaat samenhangt? [1 pt]

e) Het Hamiltonformalisme ($\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$) en de mechanica van Newton zijn equivalent, maar toch is het vaak handiger de een of de ander te gebruiken. Geef een voorbeeld van een mechanisch systeem waar het voordeliger (i) en een waar het nadeliger (ii) is het Hamiltonformalisme toe te passen dan de mechanica van Newton. Beargumenteer kort de reden(en) voor je keuze. [3 pt]

2.1 Solution

a) Voor de potengiële energie V berekenen wij zwartekrachtspotentiaal en veerpotentiaal:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k\left(s + s_\mathrm{o}\right)^2 - m_1 g\left(L - \ell - (s + s_\mathrm{o})\right) - m_2 g\ell\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}ks^2 + ks_\mathrm{o}s + m_1 g\ell - m_1 gs - m_2 g\ell\cos\theta + \mathrm{const} \\ &= \frac{1}{2}ks^2 + m_1 g\ell - m_2 g\ell\cos\theta \qquad (s_\mathrm{o} \overset{!}{=} m_1 g/k) \end{aligned}$$

Voor de kinetische energie K vinden wij:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1\left(-\dot{\ell} + \dot{s}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\ell}^2 - 2\dot{\ell}\dot{s} + \dot{s}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

b) De Lagrangiaan is gegven door $\mathcal{L} = K - V$; een gegeneralizeerde impuls is gedefinieerd als $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$, ofwel $\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_i}$ omdat V in het algemeen niet van de snelheid afhangt:

$$\begin{aligned} p_\ell &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\ell}} &&= m_1\dot{\ell} - m_1\dot{s} + m_s\dot{\ell} \\ p_s &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} &&= -m_1\dot{\ell} + m_2\dot{s} \\ p_\theta &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &&= m_2\ell^2\dot{\theta} \end{aligned} \tag{1}$$

c) De algemeene definitie van het Hamiltoniaan is $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$. Met behulp van 2 zien wij dat dit inderdaad overeenkomt met $T + V$. De Hamiltoniaan is:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_1} p_s^2 + \frac{1}{2m_2} \left((p_s + p_\ell)^2 + p_\theta^2 \right) + \frac{1}{2} k s^2 + m_1 g \ell - m_2 g \ell \cos\theta$$

d) $\mathcal{H} = T + V$ is niet tijdsafhankelijk, dus is de totaale energie behouden (en verschijnt niet als een negeerbare coördinaat)

e) Systeemen met bekende, constante krachten (vrije val) zijn het makkelijkst optelossen met Newtonse mechanica. Hamilton zou hier allen tot meer rekenwerk leiden. Systemeen waar de krachten niet bekend of van de snelheid / positie afhankelijk zijn los je beter met Lagrange of Hamilton (dubble pendulum, machine van atwood).

3 Satellietbaan

Beschouw een satelliet met massa m in een cirkelvormige baan rond de aarde (massa $M \gg m$) met straal R. **[totaal: 20 pt]**

(a) Geef de snelheid v_o van de satelliet. [2 pt]

(b) De satelliet moet worden verplaatst naar een hogere baan, met straal $2R$. Dit kan via een elliptische transferbaan. Schets de situatie en bereken de impulsverandering die nodig is om over te gaan op de transferbaan en van de transferbaan in de hogere baan. [6 pt]

(c) De raketaandrijving wordt per ongeluk geactiveerd, waardoor de snelheid van de satelliet toeneemt met Δv in de radiële richting naar buiten (van de aarde af). Geef de energie en het impulsmoment voor en na de verandering van snelheid. [2 pt]

(d) Laat zien dat voor een satelliet in een ellipsbaan, de energie het meest efficiënt vergroot kan worden door een extra voortstuwing in de bewegingsrichting op het moment dat de satelliet zich in het perigeum (punt van de baan het dichtst bij de aarde) bevindt. [4 pt]

(e) De satelliet heeft door de aanwezigheid van zonnepanelen en antennes een onregelmatige vorm. Hoeveel verschillende hoofdtraagheidsmomenten heeft de satelliet? [2 pt]

(f) De baanverandering in onderdeel (c) wordt veroorzaakt door twee stuurraketjes aan de zijkant van de satelliet. Beschrijf de beweging die de satelliet zou krijgen als er maar een stuurraketje was, of als een van de twee raketjes minder goed werkt. Geef duidelijk aan hoe je tot je antwoord komt. Geef aan waar de stuurraketjes het best kunnen zitten om de satelliet zo bestuurbaar mogelijk te houden. [4 pt]

Oplossing

(a) De zwaartekracht en de middelpuntvliedende kracht zijn in evenwicht:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R^2} &= \tfrac{mv_o^2}{R} \\ v_o &= \sqrt{\tfrac{GM}{R}} \end{aligned}$$

(b) De transferbaan heeft een lange as van $3R$

Gebruik de baanvergelijking van het formuleblad: $r(\phi) = c/(1 + \epsilon \cos \phi)$.

Voor de cirkelbaan, $\epsilon = 0$, zodat $c = R$

Voor de transferbaan is de minimale afstand tot de aarde $r_{min} = c_2/(1+\epsilon) = R$ en de maximale afstand $r_{max} = c_2/(1 - \epsilon) = 2R$

$$\epsilon = \frac{1}{3} \qquad c_2 = \frac{4}{3}R$$

Voor de cirkelbaan met straal $2R$ geldt dan weer $\epsilon = 0$, dus $c_3 = 2R$.

Van het formuleblad: $c = \frac{\ell}{\gamma \mu r^2}$, met benadering $m \ll M$, $\mu \sim m$, dus $c = \frac{m^2 v^2 r^2}{GMm^2} = \frac{v^2 r^2}{GM}$ ofwel

$$v = \sqrt{\frac{cGM}{r^2}}$$

De snelheidverandering van de cirkelbaan naar de transferbaan is dus:

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

en naar de tweede cirkelbaan (let op, de afstand $r = 2R$!):

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{GM}{R}} - \sqrt{\frac{1}{3}\frac{GM}{R}}$$

Het antwoord kan ook gegeven worden in termen van boostfactoren $\lambda = p'/p$, dwz de factor waarmee de impuls vergroot wordt. Dan geldt:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(c) In dit geval is de nieuwe totale snelheid:

$$v_{tot} = \sqrt{v^2 + (\Delta v)^2}$$

en de kinetische energie:

$$E_k = \frac{1}{2}m(v^2 + (\Delta v)^2)$$

Voor de volledigheid noemen we nog dat de potentiële energie

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

voor en na de snelheidsverandering gelijk is (hoeft niet in het antwoord gegeven te worden).

Het impulsmoment verandert niet, omdat de snelheidsverandering loodrecht op de afstandsvector staat. Dit geldt niet alleen voor infinitesimale veranderingen, maar ook voor eindige veranderingen; de snelheidsverandering geeft een verdraaiing van de snelheid over een hoek θ

$$\cos\theta = \frac{v}{\sqrt{v^2 + (\Delta v)^2}}$$

en uit een schets kan afgelezen worden dat het nieuwe impulsmoment (voor $r = 2R$, aannemen dat $r = R$ mag ook):

$$\ell' = 2R\cos\theta m v_{tot} = 2Rmv$$

De nieuwe baan is dus elliptisch, met hetzelfde impulsmoment. Het punt waar de baanverandering plaatsvond is geen bijzonder punt op de baan (apogeum of perigeum).

(d) Een voorstuwing in de bewegingsrichting is altijd het meest efficiënt, want dan tellen de snelheden linear op; als de snelheden onder een hoek staan is de lengte van de somvector som kleiner, nl. $v_{som} = \sqrt{v^2 + 2v\Delta v\cos\theta + (\Delta v)^2}$.

Een extra snelheid is dan het meest efficient, want:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 = \frac{1}{2}m(v^2 + 2v\Delta v + (\Delta v)^2)$$

de term met $2v\Delta v$ is maximaal als v maximaal is en dus in het perigeum. De baansnelheid in het perigeum is maximaal, want de afstand tot het massamiddelpunt is minimaal en het impulsmoment is behouden in de baan.

(e) Een lichaam heeft maximaal drie verschillende hoofdtraagheidsmomenten.

(f) Met een stuurraket of twee niet-gelijke stuurraketjes leveren de raketjes een krachtmoment ten opzichte van het massamiddelpunt en gaat de satelliet draaien om een of meer assen. Een vrije rotatie kan ook een precessiecomponent hebben.

Alleen rotaties om de hoofdas met het kleinste en grootste traagheidsmoment zijn stabiel. Het daarom van belang dat:

- De raketjes paarsgewijs aan weerszijden op gelijke afstand van de lichaamsassen gemonteerd zijn (zodat er geen krachtmoment is als ze beide tegelijk afgaan)
- De raketjes in zich op de lichaamsassen bevinden (met uitstoot loodrecht erop), zodat ze geen krachtmoment om de andere assen geven.

Handige formules

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\arcsin(\gamma)) = \sqrt{1-\gamma^2} \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(\pi+\beta) = -\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \qquad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -e^{i\pi} = 1, \quad \vec{F}_{\mathrm{elec}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \vec{F}_{\mathrm{Lorentz}} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$c = \frac{\ell^2}{\gamma\mu} \quad E = \frac{\gamma^2\mu}{2\ell^2}\left(\epsilon^2 - 1\right) \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \frac{c_1}{1+\epsilon_1\cos(\phi+\delta_1)} = \frac{c_2}{1+\epsilon_2\cos(\phi+\delta_2)}$$

$$U_{\mathrm{cf}}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{rel}} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \qquad J_{ij} = I_{ij}^{\mathrm{cm}} + m\left(||\vec{a}||^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$$

$$I = \iiint dV\ \rho(x,y,z)\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathbf{E}_3 - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}\right)$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{S_o} = \dot{Q} + \Omega\times Q \qquad \left(\frac{d^2Q}{dt^2}\right)_{S_o} = \ddot{Q} + 2\Omega\times\dot{Q} + \Omega\times(\Omega\times Q)$$

$$\mathcal{L} = T - V \qquad \frac{\partial\mathcal{L}\left(q(t),\dot{q}(t),t\right)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}\left(q(t),\dot{q}(t),t\right)}{\partial\dot{q}} = 0$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = T + V \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$$

$$\vec{L} = (\lambda_1\omega_1, \lambda_2\omega_2, \lambda_3\omega_3) \qquad \dot{\vec{L}} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{\Gamma}$$

$$\mathrm{Series}\left(\frac{1}{x^2}, x = r\right) = \frac{1}{r^2} - 2\frac{x-r}{r^3} + \mathcal{O}\left((x-r)^2\right)$$

$\mathbf{A}$ is positief definiet: $\forall x \in \mathbb{R}^3 :\ (x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x) > 0$