20-8-2009

JULIUS INSTITUUT
UNIVERSITEIT UTRECHT

Herkansing MECHANICA 2

Opgave 1: Vragen van leken (15 punten)

a) Onlangs kreeg ik via de mail de volgende vraag (geen natuurkundestudent):

Geachte heer, ik begrijp niet waarom bij de gravitatiewet van Newton de baan de ene keer een cirkel is en de andere keer een ellips. Waar hangt nu de excentriciteit ϵ vanaf.

Formuleer een antwoord.

b) Tijdens het verslag van een Tour de France bergetappe zei de verslaggever, oudwielrenner Maarten Ducrot: *Kan een van de kijkers mij nu eens uitleggen hoe het kan dat een zware renner sneller daalt dan een lichte renner.*

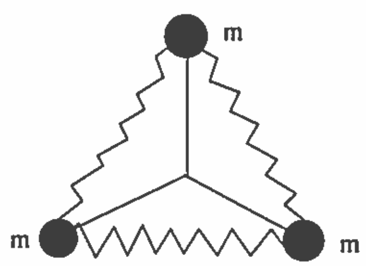
Wat zou jouw antwoord zijn.

Opgave 2: Circulair weersysteem (25 punten)
Stel een circulair weersysteem heeft een windsnelheidsveld $\mathbf{v}(r) = \frac{A}{r}\hat{\theta}$, hierin is r de afstand tot het centrum en is $\hat{\theta}$ de azimutaal (tangentieel) gerichte eenheidsvector. Een voorwerp geplaatst in dit veld ondervindt een kracht $\mathbf{F}(r) = -B\mathbf{v}$, waarin B een constante is.

a) Laat zien dat de kringintegraal van de kracht langs een gesloten contour die de oorsprong niet omsluit gelijk is aan nul. (U mag een contour kiezen bestaande uit twee cirkelbogen verbonden door twee voerstralen)

b) Bereken ook de kringintegraal van de kracht langs een contour die de oorsprong wel omsluit, bijvoorbeeld een cirkel. Is het krachtveld conservatief?

Opgave 3: Trillende massa's (35 punten)
Drie massapunten, elk met massa m kunnen wrijvingsloos bewegen over verschillende lijnstukken. De drie lijnen maken een hoek van 120° met elkaar en snijden elkaar in een punt. Dit punt nemen we als oorsprong. De massa's zijn verbonden door drie veren met rustlengte l en veerconstante k, zie figuur.



De positie van een massapunt in het x-y-vlak kan worden geschreven als

$$\vec{r}_i(t) = \vec{a}_i(1 + q_i(t)), \qquad (1)$$

waarbij $\vec{a}_i$ de evenwichtsstand is van het i-de deeltje en q_i evenredig is met de uitwijking uit die evenwichtsstand. $|\vec{a}_i|q_i$ geeft dus de uitwijking aan van de massa's langs de getekende lijnen. Vanwege de gelijkzijdige driehoek geldt dat $|\vec{a}_i| = l/\sqrt{3}$. Er is geen zwaartekracht.

a) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen q_i, $(i = 1, 2, 3)$ de onderlinge afstand tussen de massapunten gegeven wordt door

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = l(1 + \frac{1}{2}(q_i + q_j)) + O(q^2)$.

(Hint: gebruik de cosinusregel en een Taylorontwikkeling)

b) Geef de Lagrangiaan voor kleine uitwijkingen uit de evenwichtsstand, dus in de harmonische benadering.

c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de drie massapunten.

d) Bereken de frequenties van de eigentrillingen. Dit kan via een determinant, maar misschien gaat het makkelijker met handig optellen en aftrekken van de vergelijkingen.

e) Geef in een eenvoudige schets de eigentrillingen van dit systeem weer. Bij twee eigentrillingen blijft het massamiddelpunt niet op zijn plaats. Dit suggereert een netto externe kracht op het systeem. Welke kracht is hiervoor verantwoordelijk?

Opgave 4: Ruimtereis (25 punten)
Beschouw een cilindervormig ruimteschip met straal R ver verwijderd van hemellichamen. Het ruimteschip draait met constante hoeksnelheid ω om de cilinderas, waardoor op de binnenwand een kunstmatige valversnelling $\frac{1}{2}g$ heerst, waarbij g de valversnelling op het aardoppervlak is.

a) Bepaal de omwentelingstijd van het ruimteschip, uitgedrukt in R en g.

b) Een man met massa m, te beschouwen als puntmassa, loopt met een snelheid v over de binnenwand in de lengterichting van het schip. Bepaal de grootte van de normaalkracht $\vec{N}$ die de wand op de man uitoefent.

c) De man loopt met snelheid v over de binnenwand maar nu loodrecht op de lengte-as, tegen de rotatieriching van het schip in. Bepaal weer $\vec{N}$.

d) De man bevindt zich op een ladder op een afstand r van de cilinderas en klimt met een snelheid v naar de as toe. De ladder staat loodrecht op de binnenwand. Bereken in het stelsel dat met het schip meedraait alle krachten die op de man werken.

a) Laat zien dat voor kleine uitwijkingen q_i, ($i = 1, 2, 3$) de onderlinge afstand tussen de massapunten gegeven wordt door

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = l(1 + \frac{1}{2}(q_i + q_j)) + O(q^2)$.

(Hint: gebruik de cosinusregel en een Taylorontwikkeling)

b) Geef de Lagrangiaan voor kleine uitwijkingen uit de evenwichtsstand, dus in de harmonische benadering.

c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de drie massapunten.

d) Bereken de frequenties van de eigentrillingen. Dit kan via een determinant, maar misschien gaat het makkelijker met handig optellen en aftrekken van de vergelijkingen.

e) Geef in een eenvoudige schets de eigentrillingen van dit systeem weer. Bij twee eigentrillingen blijft het massamiddelpunt niet op zijn plaats. Dit suggereert een netto externe kracht op het systeem. Welke kracht is hiervoor verantwoordelijk?

Opgave 4: Ruimtereis (25 punten)

Beschouw een cilindervormig ruimteschip met straal R ver verwijderd van hemellichamen. Het ruimteschip draait met constante hoeksnelheid ω om de cilinderas, waardoor op de binnenwand een kunstmatige valversnelling $\frac{1}{2}g$ heerst, waarbij g de valversnelling op het aardoppervlak is.

a) Bepaal de omwentelingstijd van het ruimteschip, uitgedrukt in R en g.

b) Een man met massa m, te beschouwen als puntmassa, loopt met een snelheid v over de binnenwand in de lengterichting van het schip. Bepaal de grootte van de normaalkracht $\vec{N}$ die de wand op de man uitoefent.

c) De man loopt met snelheid v over de binnenwand maar nu loodrecht op de lengte-as, tegen de rotatieriching van het schip in. Bepaal weer $\vec{N}$.

d) De man bevindt zich op een ladder op een afstand r van de cilinderas en klimt met een snelheid v naar de as toe. De ladder staat loodrecht op de binnenwand. Bereken in het stelsel dat met het schip meedraait alle krachten die op de man werken.

FORMULEBLAD MECHANICA 2

Kinematica van één deeltje.
Ontbinding van snelheid en versnelling in vlakke poolcoördinaten: $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, en $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$.

Dynamica van één deeltje.
Newton: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$, $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.
impulsmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, krachtmoment: $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\tau = \dot{\mathbf{L}}$.

Arbeid en Energie.
$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -(U_p(b) - U_p(a))$ voor een conservatief krachtveld, d.w.z. als $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. $\mathbf{F} = -\text{grad}E_p$; Behoud van mechanische energie: $U + T = C$. Is een kracht conservatief dan rot $\mathbf{F}$=0, oftewel $\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x$ etc. Vermogen: $P = \dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Evenwicht: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$.

Mechanica van een systeem van deeltjes.
Massamiddelpunt $\mathbf{r}_m = \frac{1}{M}\sum_i m_i\mathbf{r}_i$; $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_m$; $\dot{\mathbf{P}} = M\mathbf{a}_m = \mathbf{F}_{ext}$; Voor twee deeltjes: $\mathbf{F}_{12} = \mu\mathbf{a}_{12}$, waarin $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. $\dot{\mathbf{L}} = \tau_{ext}$; $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{r}_m \times \mathbf{P}$; $\dot{\mathbf{L}}_m = \tau_z$. Voor twee deeltjes: $T_m = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$.

Euler-Lagrangevergelijkingen Lagrangiaan:$L = T - U$; Lagrange $\partial L/\partial q_i = d/dt \partial L/\partial \dot{q}_i$, $[i = 1, \cdots, n]$. Gegeneraliseerde impuls: $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. Voor cyclische (ignorable) coördinaten is de corresponderende gegeneraliseerde impuls behouden. Hamiltoniaan: $H = \sum_{i=1}^n p_i\dot{q}_i - L$.

Gravitatiewet:
$F = GmM/r^2$, potentiële energie, $U = -GmM/r$. Kepler 1: Banen in centraal krachtveld zijn kegelsneden, $r = \epsilon d/(1 + \epsilon\cos\phi)$. Kepler 2: $mr^2\dot{\phi} = L =$ constant. Totale energie: $E = -GmM/r + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + L^2/2mr^2$. Centrifugale potentiële energie: $L^2/2mr^2$. Voor ellipsbaan ($a = \epsilon d/(1 - \epsilon^2)$): $E = -GmM/2a$ en $\epsilon^2 = 1 + (2E/m)(L/GmM)^2$. Kepler 3: $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$.

Niet-inertiaalstelsels.
$\mathbf{F} + \mathbf{F_s} = m\mathbf{a}'$ met $\mathbf{F_s} = -m\mathbf{a}_0$ in een stelsel dat met versnelling $\mathbf{a}_0$ beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel. $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{cor} + \mathbf{F}_{cf} = m\mathbf{a}'$, met $\mathbf{F}_{cor} = -2m\omega \times \mathbf{v}'$, en $\mathbf{F}_{cf} = -m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ in een stelsel dat met hoeksnelheid ω roteert t.o.v. een inertiaalstelsel.

Eulervergelijkingen
$\lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 = \tau_1$,
$\lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_3\omega_1 = \tau_2$,
$\lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 = \tau_3$.

Traagheidstensor:
$\mathbf{I}$, $I_{xx} = \sum_\alpha m_\alpha(y_\alpha^2 + z_\alpha^2)$, enz. en $I_{xy} = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha$, enz.

Taylorontwikkeling:
$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x)\epsilon^2$.

Cosinusregel in driehoek :
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.