



Mechanica 2: Toets 2 (26-6-2008)

Formuleblad is bijgevoegd!

Niet alle onderdelen in een som zijn onafhankelijk. Mocht je vastlopen en informatie is nodig voor het volgende onderdeel, poneer een fysisch redelijk antwoord en reken/beredeneer verder. Veel succes!

1. (30 punten)

Een massieve wig met massa M ligt op een horizontale tafel en fungeert als hellend vlak met hellingshoek θ . De wig kan wrijvingsloos over de tafel bewegen. Een massieve cilinder met straal R en massa m rolt zonder te slippen langs het hellend vlak naar beneden. De positie $x(t)$ van het zwaartepunt van de wig wordt bepaald t.o.v. een vast punt P op de tafel en de positie $y(t)$ van het zwaartepunt van de cilinder wordt langs het hellend vlak bepaald zoals aangegeven in onderstaande figuur. Op tijd $t < 0$ bevinden wig en cilinder zich in rust op resp. $x = 0$ en $y = 0$. De zwaartekrachtsversnelling g mag constant worden verondersteld.

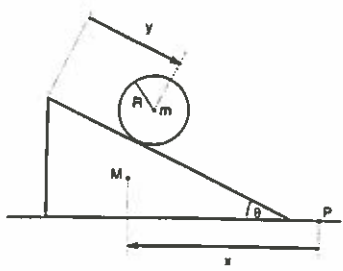


Figure 1: Situatieschets (zijaanzicht) bij opgave 1.

Beschouw eerst de situatie dat de wig wordt vastgehouden op de positie $x = 0$. Op $t = 0$ begint de cilinder zonder te slippen langs het hellend vlak naar beneden te rollen.

a. (8)
Bepaal de oplossing $y(t)$.

Beschouw nu de situatie dat de wig zich wrijvingsloos over de tafel kan bewegen. Wederom begint op $t = 0$ de cilinder zonder te slippen langs het hellend vlak naar beneden te rollen.

b. (4)
Leg uit (met gebruik van behoudswetten) waarom en hoe de wig gaat bewegen zodra de cilinder naar beneden gaat rollen.

c. (10)
Geef de uitdrukking voor de Lagrangiaan van het systeem (wig en cilinder), met x en y als generaliseerde coördinaten.

d. (8)
Leid af dat $\ddot{x} = \alpha$ en druk de constante α uit in gegeven grootheden.

2. (30 punten)

Een tweetal puntmassa's met massa m zijn door middel van staven met verwaarloosbare massa star verbonden met de rand van een platte schijf (straal R , uniforme massadichtheid ρ). De massa van de schijf is $m_s = 10m$. De puntmassa's bevinden zich op een hoogte $h = R/2$ boven, respectievelijk onder, de rand van de schijf. Kies de x -as en y -as in het vlak van de schijf en de z -as loodrecht daarop en door het massamiddelpunt (zie onderstaande figuur).

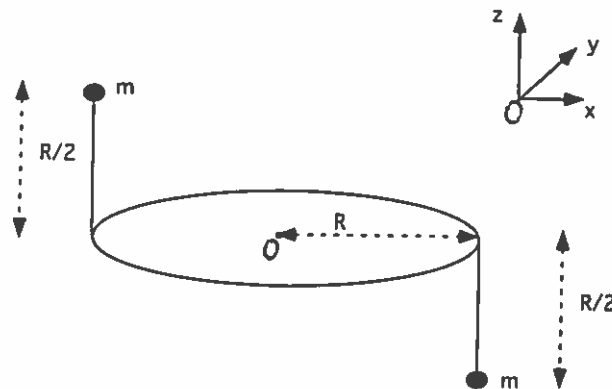


Figure 2: Situatieschets (zijaanzicht) bij opgave 2.

a. (10)

Toon aan dat de traagheidstensor \mathbf{I} van dit object (t.o.v. het $Oxyz$ stelsel) kan worden geschreven als

$$\mathbf{I} = mR^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

b. (8)

Bepaal de hoofdassen van het object en de representatie van de traagheidstensor t.o.v. deze hoofdassen.

c. (8)

Bereken de impulsmoment vector \mathbf{L} van het object (t.o.v. de oorsprong in het inertiaalstelsel) indien er sprake is van een vaste rotatie om de z -as met hoeksnelheid ω .

d. (4)

Bereken de krachtmoment vector \mathbf{N} (norm + richting) die nodig is om de rotatie als onder c. te onderhouden.

3. (30 punten)

Een massieve staaf (straal a , lengte $\ell = \mu a$, $\mu > 0$ en homogene dichtheidsverdeling ρ) voert een vrije rotatie uit om een punt O dat zich bevindt in het midden van één van de uiteinden van de staaf (Fig. 3). Kies O als oorsprong en de hoofdassen van de staaf als coördinaatassen met de

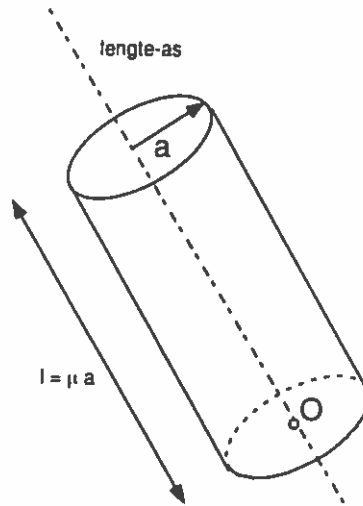


Figure 3: Situatieschets (zijaanzicht) bij Opgave 3.

lengte as als 3-as. Noem de traagheidsmomenten langs deze assen I_1, I_2 en I_3 respectievelijk, waarbij $I_1 = I_2 = I$ en $I_3 = I_s$.

a. (8)

Bepaal de waarde van $\mu = \mu_0$ zodat $I = I_s$.

Op het tijdstip $t = 0$ maakt de rotatieas een hoek α met de lengte-as van de staaf. Deze hoek wordt gegeven door:

$$\cos \alpha = \frac{\omega_3}{\omega} ; \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

waarbij ω_1, ω_2 en ω_3 de componenten van de rotatievector $\vec{\omega}$ langs de drie hoofdassen zijn.

b. (8)

Toon aan (met behulp van de Eulervergelijkingen) dat voor willekeurige μ geldt dat $\dot{\omega} = \dot{\alpha} = 0$.

c. (8)

Beschrijf de precessiebeweging die de staaf uit gaat voeren gezien vanuit een inertiaalstelsel. Schets daartoe in een figuur de te verwachten beweging met de vectoren $\vec{\omega}$ en \mathbf{L} . Onderscheid hierbij de twee verschillende gevallen (i) $\mu > \mu_0$ en (ii) $0 < \mu < \mu_0$.

d. (6)

Bepaal de frequenties van de precessiebeweging gezien vanuit het inertiaalstelsel voor het geval $I_s = 2I/5$.

Formuleblad

A1. goniometrische relaties:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \\ \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

A2. bolcoördinaten r, θ, ϕ :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ dx dy dz &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi\end{aligned}$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

A3. cylindercoördinaten R, θ, z :

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta, \\ dx dy dz &= R dR d\theta dz\end{aligned}$$

$$y = R \sin \theta, \quad z = z$$

A4. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

A5. $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$

A6. $\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{fixed}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$

B1. Bewegingsvergelijkingen meerdeeltjessysteem:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

B2. Hoekimpulsvector $\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
 waarbij $\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$, $\vec{v}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$

B3. Bewegingsvergelijkingen 2-deeltjessysteem:

$$\mu \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = f(R) \frac{\vec{R}}{R}$$

met μ de gereduceerde massa, \vec{R} relatieve positievector.

B4. Kop-staart botsingen; restitutiecoëfficiënt en energieverliesfactor:

$$\epsilon = \left| \frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \right|, \quad Q = \frac{1}{2} \mu (v_2 - v_1)^2 (1 - \epsilon^2)$$

B5. Scheve botsingen:

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2} \left[1 - \frac{Q}{T} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^{-1/2}$$

met ϕ_1, θ verstrooiingshoeken in het lab- en cm-stelsel.

C1. Traagheidstensor:

$$I = \sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \mathbf{1} - \sum_i m_i \vec{r}_i \vec{r}_i$$

C2. Traagheidsmoment om een as: $I = \vec{n} \cdot (I \cdot \vec{n})$

zie ook bijgevoegde tabel.

C3. Slipformulering: $F_P = \mu_k F_N$

D1. Eulervergelijkingen: $N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$
(overige vergelijkingen: indices cyclisch permuteren)

D2. Vrije precessie: frequentie $\Omega = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right) \omega \cos \alpha$
en $\tan \theta = \frac{I_3}{I_1} \tan \alpha$ (θ een Eulerhoek)

D3. 'Wobble frequency': $\dot{\phi} = \omega \left[1 + \left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \cos^2 \alpha\right]^{1/2}$

D4. Componenten rotatievector in 'accent'stelsel:

$$\omega_{x'} = \dot{\theta}, \quad \omega_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

D5. Energievergelijking voor een tol:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{I} [E' - V(\theta)], \quad V(\theta) = \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta}{2I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

$$\text{en } L_z = I \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + L_{z'} \cos \theta$$

TABLE 8.3.1

Values of k^2 of Various Bodies (Moment of Inertia = Mass $\times k^2$)

Body	Axis	k^2
Thin rod, length a	Normal to rod at its center	$\frac{a^2}{12}$
	Normal to rod at one end	$\frac{a^2}{3}$
Thin rectangular lamina, sides a and b	Through the center, parallel to side b	$\frac{a^2}{12}$
	Through the center, normal to the lamina	$\frac{a^2 + b^2}{12}$
Thin circular disc, radius a	Through the center, in the plane of the disc	$\frac{a^2}{4}$
	Through the center, normal to the disc	$\frac{a^2}{2}$
Thin hoop (or ring), radius a	Through the center, in the plane of the hoop	$\frac{a^2}{2}$
	Through the center, normal to the plane of the hoop	a^2
Thin cylindrical shell, radius a , length b	Central longitudinal axis	a^2
Uniform solid right circular cylinder, radius a , length b	Central longitudinal axis	$\frac{a^2}{2}$
	Through the center, perpendicular to longitudinal axis	$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}$
Thin spherical shell, radius a	Any diameter	$\frac{2}{3}a^2$
Uniform solid sphere, radius a	Any diameter	$\frac{2}{5}a^2$
Uniform solid rectangular parallelepiped, sides a , b , and c	Through the center, normal to face ab , parallel to edge c	$\frac{a^2 + b^2}{12}$

Formuleblad

Inproduct : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Uitproduct : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma + \dots$$

Taylor reeks : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$

Krachten en arbeid : $\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{p} = \vec{F}$ $W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

Versnelde coördinatenstelsels : $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}' - \vec{V}_0$ $\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \vec{A}_0$

Lagrange : 2e soort $L = K - V$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Lagrange : 1e soort $L = K - V ; f(q_1, \dots, q_n) = 0$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_k}$

Lagrange : gegeneraliseerd $Q_k = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k$