

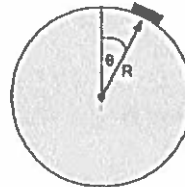
# Bijlage A

## Tentamenopgaven

### A.1 Schijf op een bol

Een schijf met massa  $m$  balanceert bovenop een bol met straal  $R$ . De bol blijft bewegingsloos in dit probleem. De wrijvingskracht tussen de schijf en de bol is  $F_w = \gamma F_N$ , waarbij  $\gamma$  een positieve constante is en  $F_N$  de normaalkracht is die de bol op de schijf uitoefent. De richting van de wrijvingskracht is tegengesteld aan de beweging van de schijf.

De schijf wordt langzaam vanaf de bovenkant van de bol geduwd, totdat de schijf vanzelf naar beneden glijdt onder de invloed van de zwaartekracht. [totaal: 10pt]

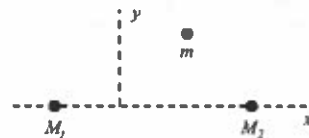


- Definieer en bereken alle krachten die op de schijf werken als de hoek vanaf de top van de bol  $\theta$  is en de snelheid  $v$ . [3 pt]
- Bereken de minimale hoek  $\theta_0$  waarbij de schijf begint te glijden onder z'n eigen gewicht. Wat geldt voor de maximale hoek  $\theta_1$  waarbij de schijf van de bol afvliegt? Beschrijf ook in woorden wat de fysische condities zijn waardoor deze hoeken bepaald worden. [2 pt]
- Gebruik de wet van behoud van energie om een differentiaalvergelijking op te stellen waaraan de snelheid  $v$  van de schijf als functie van de hoek  $\theta \leq \theta_1$  voldoet. Het is niet nodig de vergelijking op te lossen. [3 pt]
- Laat zien dat in de limiet  $\gamma \rightarrow 0$  de vergelijking  $v(h)^2 = 2g(R-h)$  voor een schijf en bol zonder wrijving een oplossing van de in (c) gevonden differentiaalvergelijking is. [2 pt]

### A.2 Lagrange-punten

Beschouw een systeem van twee hemellichamen met massa's  $M_1$  en  $M_2$  die om een gezamenlijk massamiddelpunt heen bewegen onder invloed van de zwaartekracht. We beschouwen nu een derde 'testmassa'  $m \ll M_1, M_2$  en verwaarlozen de invloed die deze massa heeft op de beweging van de twee hemellichamen.

We beschouwen dit systeem in een meedraaiend stelsel, waarin  $M_1$  en  $M_2$  op de horizontale  $x$ -as liggen.



De relatie tussen omwentelingsnelheid  $\Omega$  van lichamen 1 en 2 in het massamiddelpuntstelsel en de afstand  $R$  tussen de lichamen volgt de derde wet van Kepler:  $\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2)$ . [totaal: 20 pt]

- Specificeer alle krachten en schijnkrachten die testmassa ( $m$ ) ondervindt en maak een schets waarin de richtingen van deze krachten zijn aangegeven. [4 pt]
- De zgn. Lagrangepunten zijn stationaire punten, waarvoor geldt dat de totale kracht  $\vec{F}$  op de testmassa gelijk is aan nul als de snelheid van de testmassa  $\vec{v} = 0$  in het meedraaiende systeem. Geef de componenten van  $\vec{F}$  voor dit geval ( $v = 0$ ) als functie van de positie ( $x$  en  $y$ ) ten opzichte van het massamiddelpunt. [5 pt]

De eerste drie Lagrangepunten liggen op de  $x$ -as ( $y = 0$ ). We gaan nu op zoek naar Lagrangepunten 4 en 5, met  $y \neq 0$ .

- Ontbind de kracht op de testmassa (van vraag (b)) in de componenten loodrecht op en parallel aan de eenheidsvector  $\hat{r}$  in de richting van de lijn die de positie van testmassa ten opzichte van het massamiddelpunt van  $M_1$  en  $M_2$  aangeeft. Laat zien dat de krachtcomponent loodrecht op  $\hat{r}$

$$F_{\perp} = m\alpha\beta y\Omega^2 R^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{1}{((x - R\beta)^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{((x + R\alpha)^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right),$$

met  $\alpha = M_2/(M_1 + M_2)$  en  $\beta = M_1/(M_1 + M_2)$ . Wat betekent dit voor de positie van de Lagrangepunten? [4 pt]

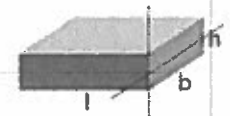
- Geef nu  $F_{\parallel}$  en geef de positie van  $L_4$  en  $L_5$ . [5 pt]

De Lagrangepunten liggen over het algemeen op een zadelpunt van de zwaartekrachtspotentiaal. Hierdoor is er geen stabiel evenwicht in de punten, als de massa  $m$  zich begint te verplaatsen vanaf het Lagrangepunt, neemt de kracht toe en verwijderd de massa zich alsnar verder.

- Lagrangepunten 4 en 5 zijn toch stabiel. Welke van de in onderdeel (a) genoemde krachten denk je dat er hier kan werken als de 'restoring force'? [2 pt]

### A.3 Tuimelend Blok

We beschouwen de rotatiebeweging van een rechthoekig blok met massa  $M$  met homogene massaverdeling (dichtheid  $\rho$ ) en met afmetingen  $h < b < l$  (zie figuur A.1). [totaal: 25 pt]



- Bereken het traagheidsmoment  $I$  van dit blok ten opzichte van een as loodrecht op het  $lb$ -vlak, langs een van de randen van het blok. Reken, voor de keuze van twee andere assen, zoals in de tekening aangegeven, de drie traagheidsproducten (let op: niet de momenten!) uit. [4 pt]
- Rondom welke van de aangegeven assen kan het blok alleen draaien als er een krachtmoment wordt uitgeoefend (dus niet vrij roteren)? [3 pt]

Figuur A.1: Rechthoekig blok met homogene massaverdeling.

galen van de index het teken van de 0-component omdraait:  $x^0 = -x_0$ . We kunnen dit samenvatten in de vergelijking

$$x_\mu \equiv \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu := \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (11.5)$$

waarbij  $\eta_{\mu\nu}$  een element is van de diagonaalmatrix  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  (metrische tensor of Minkowski-metrik), alle niet-diagonale elementen zijn gelijk aan 0. Om de notatie te vereenvoudigen hebben we de Einstein-sommatieconventie ingevoerd. Volgens deze conventie moet er gesommeerd worden over indices die herhaald worden. Een herhaalde index, ook wel gecontracteerde index genoemd, komt altijd tweemaal voor; eenmaal als onderindex en eenmaal als bovenindex. Een index die slechts eenmaal voorkomt wordt een vrije index genoemd. Aan de linker end rechterkant van een vergelijking moeten altijd dezelfde vrije indices voorkomen. Bijvoorbeeld in de bovenstaande vergelijking is  $\mu$  de vrije index, en omdat deze vier waarden aanneemt staan er dus eigenlijk vier vergelijkingen.

Onderindexen kunnen naar boven gehaald worden door de inverse  $\eta^{\mu\nu}$  van  $\eta_{\mu\nu}$ .

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \text{ met } \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (11.6)$$

waar  $\delta^\mu_\nu$ , het Kronecker delta-symbool is, als  $4 \times 4$  matrix is dit de eenheidsmatrix. Let goed op de positie van de indices in de matrices, voor de duidelijkheid is het raadzaam de kolomindex van een matrix duidelijk als tweede index te positioneren. Bij de 4-componenten notatie is het in principe niet belangrijk in welke volgorde de verschillende symbolen worden geschreven, maar om de notatie enigszins leesbaar te maken is het aan te raden om herhaalde indices zo dicht mogelijk bij elkaar te schrijven, indien mogelijk naast elkaar!

a) Schrijf  $\eta^{\mu\nu}$  als een  $4 \times 4$  matrix. Leid vgl. 11.5 af uit vgl. 11.6.

De norm van de 4-vector  $x^\mu$  is gedefinieerd als

$$x^2 := x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = \vec{x}^2 - c^2 t^2. \quad (11.7)$$

We hebben al gezien dat  $x^2$  invariant is onder de Lorentztransformatie. Omdat dit een lineaire transformatie is kunnen we het in 4-componenten notatie schrijven in de vorm

$$(x')^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (11.8)$$

Hierbij geeft  $L^\mu_\nu$  de  $4 \times 4$  matrix aan, waarbij de eerste index de rij en de tweede index de kolom aanduidt. De sommatie over  $\nu$ , gecompliceerd door de sommatieconventie, komt precies overeen met de gebruikelijke regel voor vermenigvuldiging van een matrix met een kolomvector.

b) laat zien dat uit het feit dat  $x^2$  Lorentzinvariant is dit ook moet gelden voor het in-product

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = \vec{x} \cdot \vec{y} - x^0 y^0. \quad (11.9)$$

(Hint: gebruik  $2x\vec{y} = (x+y)^2 - x^2 - y^2$ )

c) Leid uit de invariantie van het in-product  $x \cdot y$  en 11.8 (voor  $y'$ ) af dat de transformatieregel voor een 4-vector met onderindex gegeven wordt door

$$(x')_\mu = x_\nu (L^{-1})^\nu_\mu \text{ waarbij } (L^{-1})^\nu_\mu (L)^\mu_\lambda = \delta^\nu_\lambda \quad (11.10)$$

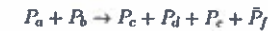
d) Laat zien dat uit de invariantie van het in-product ook volgt:

$$\eta_{\rho\sigma} L^\rho_\nu L^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (11.11)$$

e) Laat zien dat  $\eta_{\rho\sigma} L^\rho_\nu \eta^{\nu\lambda} = (L^{-1})^\lambda_\sigma$  of in matrixvorm  $L^{-1} = \eta L^T \eta$ . Hoe vinden we op eenvoudige wijze de inverse Lorentztransformatie  $L^{-1}$ ?

### 11.3 Invariante Massa

Antiprotonen ( $\bar{P}$ ) kunnen in versnellers geproduceerd worden door de reactie:



Hierbij botst een proton met kinetische energie  $T$  tegen een stilstaand proton in een trefplaatje. Voor de massa van zowel het proton als het antiproton geldt  $m_P = 1 \text{ GeV}/c^2$ .

- Geef de vier-impulsvectoren van de twee protonen voor de botsing in termen van de gegeven grootheden. Welke behoudswet geldt er?
- Bereken de invariante massa van het systeem voor de botsing.
- Hoeveel energie is minimaal nodig om deze reactie mogelijk te maken? (Hint: ga na wat de conditie is voor minimale energie in het coördinatenstelsel dat met het massamiddelpunt mee beweegt.)
- Bereken de energie en de impuls van de reactie-producten in de genoemde drempelsituatie.

We concentreren ons nu op vrije rotaties van het blok (geen krachtmomenten), die we beschrijven met behulp van de hoofdtraagheidsmomenten  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

- (c) Door welke oorsprong gaan de assen met het kleinste traagheidsmoment? In welke richtingen ten opzichte van het blok staan de drie hoofdassen? [2 pt]
- (d) Stel de Eulervergelijkingen op. [3 pt]

Voor een symmetrisch object met  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  hebben we gezien dat de rotatievector  $\vec{\omega}$  beschreven kan worden als een constante component  $\omega_3$  langs de lichaamsas (richting  $\hat{e}_3$ ) en een component met constante grootte, loodrecht op de lichaamsas, die met een vaste hoeksnelheid om de lichaamsas draait. Voor het blok, met  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , testen we nu of we vergelijkbaar gedrag mogen verwachten. Hiertoe gaan we uit van een rotatievector die vrijwel precies langs een van de 3 hoofdassen ligt, en beschouwen het effect van een kleine component loodrecht op de hoofd-as.

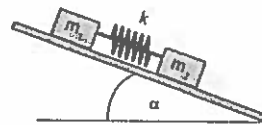
- (e) Ga uit van een rotatie vrijwel precies rond richting  $\hat{e}_3$ , zodat  $\omega_3 \gg \omega_2, \omega_1$ . Neem aan dat  $\omega_3$  constant is. Gebruik deze informatie om de Eulervergelijkingen voor  $\omega_1$  en  $\omega_2$  te vereenvoudigen, en los deze twee vergelijkingen op. [5 pt]

(Tip: gebruik voor deze componenten als probeeroplossing  $\omega_{1,2}(t) = Ae^{kt}$  en houd bij de oplossing rekening met  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ).

- (f) Doe hetzelfde als bij (e) voor de twee rotaties vrijwel precies rond richting  $\hat{e}_1$  en vrijwel precies rond richting  $\hat{e}_2$ . [5 pt]
- (g) Bespreek de bij (e) en (f) gevonden antwoorden in termen van stabiele en instabiele rotaties. [3 pt]

### A.4 Veer op een helling

Twee blokken met ongelijke massa's  $m_1$  en  $m_2$  liggen op een hellend vlak met hellingshoek  $\alpha$  (zie figuur A.2). De blokken zijn onderling verbonden door een ideale veer met veerconstante  $k$ . De blokken glijden wrijvingsloos over het vlak. Blokken en veer bevinden zich in het vlak van de tekening en ook hun bewegingen vinden uitsluitend in dit vlak plaats. [Totaal: 15 pt]

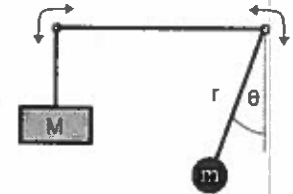


Figuur A.2: Twee blokken met ongelijke massa's op een helling.

- (a) Schrijf de Lagrangiaan voor dit systeem in termen van de Cartesische coördinaten  $x_1, y_1$  en  $x_2, y_2$  voor de posities van het linker ( $m_1$ ) en rechter ( $m_2$ ) blok. Kies daarbij de  $x$ -as langs de helling en de  $y$ -as loodrecht op de helling omhoog. Houd hierbij nog geen rekening met de beperking dat de blokken op de helling blijven. [4 pt]
- (b) Geef de twee constraint-vergelijkingen op voor de beweging van de twee blokken. [2 pt]
- (c) Gebruik het Euler-Lagrangeformalisme met de Lagrange-multiplier techniek om de bewegingsvergelijkingen (differentiële vorm) op te stellen. [3 pt]
- (d) Wat is de kracht die ervoor zorgt dat de blokjes op de helling blijven? Reken de grootte van de kracht uit met behulp van de Lagrange-multiplier. [2 pt]
- (e) Welke lineaire combinaties van de bewegingsvergelijkingen in onderdeel (c) zijn handig voor het oplossen? Maak hiervan gebruik en geef de algemene oplossing. [4 pt]

### A.5 Slinger van Atwood

Figuur A.3 toont een slinger van Atwood. Twee massa's zijn met elkaar verbonden door een massaloos touw van vaste lengte dat wrijvingsloos over twee ophangpunten kan glijden. De eerste massa  $M$  kan alleen verticaal bewegen, terwijl de tweede massa  $m$  zowel verticaal als horizontaal kan bewegen. [totaal: 15 pt]

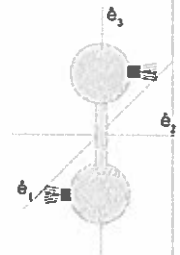


Figuur A.3: Slinger van Atwood

- (a) Geef de potentiële energie  $U$  en de kinetische energie  $K$  van het systeem. [3 pt]
- (b) Bereken de gegeneraliseerde impulsen  $p_\theta$  en  $p_r$ . [2 pt]
- (c) Gebruik de gegeneraliseerde impulsen van onderdeel (b) om de snelheden  $\dot{\theta}$  en  $\dot{r}$  uit te drukken als functie van de gegeneraliseerde impulsen; gebruik die uitdrukkingen om de Hamiltoniaan  $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$  op te schrijven. [4 pt]
- (d) Gebruik Hamiltons formalisme om de bewegingsvergelijkingen voor  $r$  en  $\theta$  op te stellen. Je hoeft de differentiaalvergelijkingen niet op te lossen. [4 pt]
- (e) De bij onderdeel (d) opgestelde bewegingsvergelijkingen zijn in het algemeen niet oplosbaar. Geef aan waarom dat zo is. [2 pt]

### A.6 Haltervormige Satelliet

Een satelliet is opgebouwd uit twee bolvormige gedeelten, die verbonden zijn door een cilindrische buis. De bollen hebben elk een straal  $R$  en een massa  $m$ , en de buis heeft een lengte  $l$  en een verwaarloosbaar kleine massa. Neem aan dat de massa van de bollen homogeen over hun volume is verdeeld. [totaal: 25 pt]



- a) Bereken de drie hoofdtraagheidsmomenten. Hierbij mogen de twee bollen *niet* als puntmassa's worden beschouwd! (Tip: als je het traagheidsmoment van een bol niet weet en niet kunt uitrekenen, laat het als onbekende  $I$  in de formule voor de  $\lambda_i$ 's staan!) [5 pt]
- b) Op het midden van elke bol bevindt zich een stuurraket waarmee een rotatie om as 1 kan worden bewerkstelligd. Stel dat  $R = 10\text{ m}$ ,  $l = 20\text{ m}$  en  $M = 1000\text{ kg}$ . Stel verder dat de stuwkracht per raket  $F = 25\text{ N}$  bedraagt. Hoe lang moeten de twee raketten aanstaan om een kunstmatige zwaartekrachtsversnelling te genereren in het midden van de twee bollen van  $\frac{1}{3}g$ ? [3 pt]
- c) Wat voor krachten voelt een astronaut als deze in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt? [2 pt]
- d) Gebruik de Eulervergelijkingen zonder koppel (zie formuleblad) om te analyseren wat er gebeurt met de rotatie als de stuurraketten niet alleen een draaiing rondom as 1 hebben veroorzaakt maar ook een lichte rotatie om as 3; m.a.w. geef de rotatiesnelheden  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  als functie van de tijd, uitgaande van  $\omega_2 = 0$  en  $\omega_3 \ll \omega_1$  op tijdstip  $t = 0$ . [5 pt]

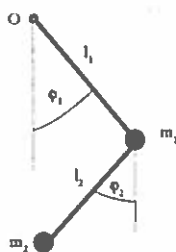
We brengen de satelliet in een cirkelbaan met straal  $r$  om een planeet met massa  $M_P$  en laten de satelliet precies zo rond zijn as 1 draaien, dat een van de twee bollen voortdurend in de richting van de planeet wijst.

- e) Gemiddeld heerst er nu binnen de satelliet gewichtsloosheid. Toch zijn er kleine variaties. Hoe groot is de daardoor optredende versnelling die in het midden van elk van de twee bollen te voelen is? (Tip: gebruik een Taylor expansie  $t/m$  de lineaire term) In welke richting staat deze versnelling in elke bol? Hoe noem je deze versnelling of de daarmee geassocieerde krachten? [6 pt]
- f) Wat voor beweging zal de satelliet maken ten gevolge van de bij e) beschouwde versnellingen als as 3 van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is? Reken deze beweging uit in de limiet van een kleine initiële afwijking  $\theta_0$ . [4 pt]

## A.7 Dubbele slinger

Een mathematische slinger met lengte  $l_1$  en massa  $m_1$  is bevestigd in punt  $O$ . Een tweede slinger met lengte  $l_2$  en massa  $m_2$  is bevestigd aan het eind van de eerste slinger. Alle verbindingen kunnen wrijvingsloos bewegen en kunnen massaloos verondersteld worden. [totaal: 15 pt]

- (a) Formuleer de Lagrangiaan  $\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, t)$  die bij dit systeem hoort. (Noot: De Lagrangiaan bevat een groot aantal termen. Het kan makkelijk zijn om eerst een algemenere uitdrukking op te schrijven en vervolgens de termen apart uit te schrijven) [4 pt]



- (b) Geef de bewegingsvergelijkingen voor  $\phi_1$  en  $\phi_2$ . [4 pt]

Gebruik vanaf nu de benadering  $l_1 = l_2 = 1$ .

- (c) Beschouw het geval dat  $m_1 \gg m_2$ . Beschrijf de beweging van  $\phi_1$ . [3 pt]

- (d) De dubbele slinger is een chaotisch systeem.

- i) Figuur A.4 toont de coördinaten  $\phi_1$  en  $\phi_2$  als functie van de tijd. Welke karakteristieke eigenschap van een chaotisch systeem (bijzonder  $\phi_2$ ) is zichtbaar in (a) en (b)? Bespreek de gevolgen van deze eigenschap. Welke grootheid/variabele beschrijft deze eigenschap? Definieer de grootheid en leg uit wat voor waarden je verwacht voor chaotisch gedrag. [2 pt]
- ii) Gezien de resultaten van punt (c) en figuur A.4(c), vind de 'control parameter' van een dubbele slinger met constante energie. Definieer 'control parameter' en leg uit welke waarden je verwacht voor niet-chaotisch en chaotisch gedrag. [2 pt]