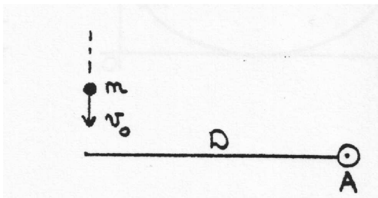
Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2004/2005 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Mechanica 2, eindtoets (NS-350b)
3 februari 2005

N.B. Bij dit tentamen hoort een formuleblad van vier kantjes. Dit kun je inzien in papieren vorm in de A−Eskwadraat-kamer.

Opgave 1 Centraliteit

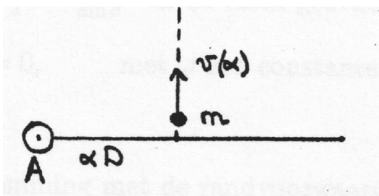
Een massaloze stang met lengte D kan wrijvingsloos draaien om een vaste massaloze as A die loodrecht op het vlak van tekening staat. Een schaatser met massa m beweegt wrijvingsloos in rechte lijn met snelheid v_0 over ijs en pakt het uiteinde van de stang stevig vast (zie figuur). Op het moment van vastpakken staat de stang loodrecht op de baan van de schaatser.



a) Hoe groot is het impulsmoment van de schaatser t.o.v. de as A? *(3 punten)*

b) De schaatser dient, bij het rondzwieren over het ijs rond as A, de stang stevig vast te houden want er werkt een kracht op hem. Geef de richting en de grootte van deze kracht. *(4 punten)*

Gedurende een aantal rondjes weet de schaatser zich met moeite (maar zonder massaverlies) langs de stang naar de as toe te werken en heeft tentslotte een afstand αD (met $\alpha < 1$) tot as A. Op deze positie laat hij, nog weer wat later, de stang los, op zodanig tijdstip dat hij met snelheid $v(\alpha)$ precies tegengesteld aan de oorspronkelijke snelheid v_0 beweegt, zoals aangegeven in bijgaande figuur.

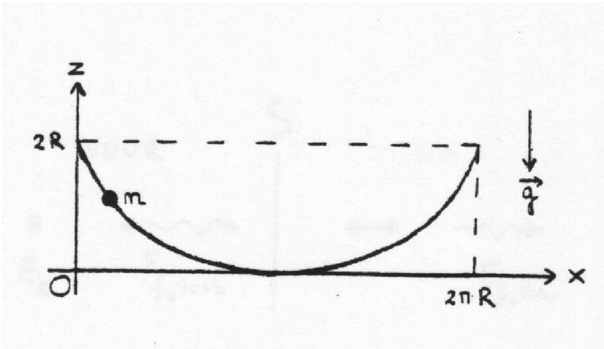


c) Bij het verkleinen van de afstand tot de as A oefent de schaatser een kracht uit. Ga na of er wel impulsmomentbehoud t.o.v. as A bestaat. Bereken $v(\alpha)$. *(8 punten)*

d) De schaatser heeft aan kinetische energie een winst geboekt van $\frac{1}{2}mv(\alpha)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$. Verifieer dat dit juist zijn verrichte arbeid is, door expliciete integratie van de kracht uit onderdeel b). *(10 punten)*

Opgave 2

In een verticaal vlak glijdt een kraal met massa m wrijvingsloos langs een draad in vaste vorm van een cycloïde, met als parametervergelijkingen $x = R(\theta - \sin\theta)$ en $z = R(1 + \cos\theta)$, met $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Het geheel bevindt zich in het gravitatieveld $\vec{g}$, met de potentiaal nul gekozen voor $z = 0$. De kraal start op $t = 0$ met de parameterwaarde $\theta = 0$.



a) Met welke snelheid start de kraal? Bepaal de Lagrangiaan L en leid af dat de beweging van de kraal beschreven wordt door de differentiaalvergelijking

$$2\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 - \frac{g}{R} = 0$$

(10 punten)

b) Voldoet de oplossing $\theta = \sqrt{\frac{g}{r}}t$? Om van het begin van de boog naar het einde van de boog te komen heeft de kraal een tijd $\frac{1}{2}T$ nodig. Bepaal T. Tijdens de beweging is de versnelling van de kraal $\vec{a}$. Laat zien dat $|\vec{a}|$ een bewegingsconstante is en bepaal de grootte hiervan. Hoe is $\vec{a}$ gericht voor $z = 2R$ en $z = 0$? *(10 punten)*

c) De differentiaalvergelijking van a) kan via de relatie $\tan\frac{\theta}{2} - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ in de vorm gebracht kan worden van

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\cos\frac{\theta}{2}) + \omega^2(\cos\frac{\theta}{2}) = 0, \qquad \omega \text{ constant}$$

Verifeer dit en bepaal ω. Geef de oplossing voor $\cos\frac{\theta}{2}$, in overeenstemming met de randvoorwaarde. *(10 punten)*

We leiden nu af dat de periode T *onafhankelijk* is van de hoogte waarop de kraal losgelaten wordt. Dus T is onafhankelijk van de amplitude (tautochroniciteit).

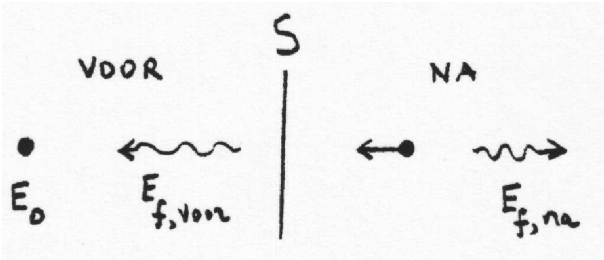
d) Merk op dat bij loslaten van de kraal op hoogte z_0, de snelheid ervan bij hoogte z gegeven wordt door $v(z) = \sqrt{2g(z_0 - z)}$. Verifieer dat geldt $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}z)^2\{1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z})^2\} = (\mathrm{d}z)^2\frac{2R}{z}$, zodat

$$\tfrac{1}{4}T = \int_{z=0}^{z_0}\mathrm{d}t = \int_{z=0}^{z_0}\frac{\mathrm{d}s}{v} = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{z_0}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z_0 z - z^2}}$$

Laat nu op eenvoudige wijze zien dat T niet van z_0 afhangt en bereken T. *(10 punten)*

Opgave 3 Van licht naar γ-straling

In het stelsel $\mathcal{S}$ botst een foton, met energie $E_{f,\text{voor}}$, tegen een electron in rust, met rustenergie E_0. Het foton wordt elastisch verstrooid over 180° en heeft na de botsing een energie $E_{f,\text{na}}$ (zie figuur). We willen $E_{f,\text{na}}$ uitdrukken in $E_{f,\text{voor}}$ en E_0. De richting van de drie-impuls naar rechts wordt als positief gekozen.



a) Geef de vierimpuls $\tilde{p}_{e,\text{voor}}$ van het electron vóór de botsing en ook $\tilde{p}_{f,\text{voor}}$ en $\tilde{p}_{f,na}$, uitgedrukt in $E_0, E_{f,\text{voor}}$, en $E_{f,\text{na}}$. Bepaal de kwadraten van deze drie viervectoren, en van $\tilde{p}_{e,\text{na}}$. *(5 punten)*

b) Laat zien dat

$$\tilde{p}_{e,\text{na}} = \tilde{p}_{e,\text{voor}} + (\tilde{p}_{f,\text{voor}} - \tilde{p}_{f,\text{na}})$$

en leid via kwadratering af dat

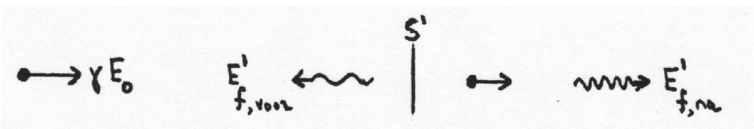
$$\tilde{p}_{f,\text{voor}} \cdot \tilde{p}_{f,\text{na}} = \tilde{p}_{e,\text{voor}} \cdot (\tilde{p}_{f,\text{voor}} - \tilde{p}_{f,\text{na}})$$

Toon vervolgens aan dat

$$E_{f,\text{na}} = \frac{E_0 E_{f,\text{voor}}}{E_0 + 2E_{f,\text{voor}}}$$

Wat wordt $E_{f,\text{na}}$ wanneer $E_{f,\text{voor}} \gg E_0$? En wat als $E_{f,\text{voor}} \ll E_0$? *(15 punten)*

Stelsel $\mathcal{S}'$ beweegt t.o.v. $\mathcal{S}$ in de richting van $E_{f,\text{voor}}$, met snelheid βc. Bij β behoren de grootheden $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ en $\kappa = \gamma(1+\beta) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$. In $\mathcal{S}'$, vóór de botsing, heeft het electron dan een snelheid βc en dus een energie $E' = \gamma E_0$. De situatie in $\mathcal{S}'$ is dus:



Bij nadering met snelheid βc neemt (door het Doppler-effect) de energie van een foton toe met factor km, dus $E'_{f,\text{na}} = kE_{f,\text{na}}$.

c) Leid nu via het resultaat in b) af dat

$$E'_{f,\text{na}} = E'_{f,\text{voor}} \frac{k^2}{1 + 2k\left(\frac{E'_{f,\text{voor}}}{E_0}\right)}$$

(10 punten)

d) Beschouw nu de situatie in $\mathcal{S}'$ als een laboratorium waarin een laser-foton met een energie van 2.5 eV botst met een electron van $E_{\text{tot}} = 250$ MeV (neem $E_0 = 0.5$ MeV). Hoe groot wordt $E'_{f,\text{na}}$ nu? *(5 punten)*