Julius Instituut, Faculteit Natuur- en Sterrenkunde, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A−Eskwadraat.
Het college NS-350b werd in 2004/2005 gegeven door N.J.A.M. van Eijndhoven en G.A.P. Engelbertink.

Uitwerking[1] Mechanica 2 (NS-350b)
3 februari 2005

Opgave 1

a) mv_0D

b) $\frac{m{v_0}^2}{D}$ en langs de stang naar buiten gericht (centrifugaalkracht)

c) De kracht van de schaatser langs de stang is centraal gericht en dus geldt impulsmomentbehoud t.o.v. A.
$mv(\alpha)[\alpha D] = mv_0D, \quad \text{dus} \quad v(\alpha) = \frac{v_0D}{\alpha D} = \frac{v_0}{\alpha}$

d) $\frac{1}{2}mv^2(\alpha) - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2(\frac{1}{\alpha^2} - 1)$
Met $v(x) = \frac{v_0D}{x}$ wordt de arbeid verricht door de schaatser.

$$= \int_D^{\alpha D}\left(\frac{-mv^2(x)}{x}\right)dx = -m{v_0}^2D^2\int_D^{\alpha D}\frac{dx}{x^3} = -m{v_0}^2D^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{(\alpha D)^2} - \frac{1}{D^2}\right] = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)$$

Opgave 2

a) $\dot{x} = R\dot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta} = R\dot{\theta}(1-\cos\theta) = 0$ voor $\theta = 0$ en $\dot{z} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$ voor $\theta = 0$.

De beginsnelheid is dus nul.

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{z}^2 = \tfrac{1}{2}mR^2(\dot{\theta} - \cos\theta\,\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}mR^2(-\sin\theta)^2\dot{\theta}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\} = mR^2(1-\cos\theta)\dot{\theta}^2 \\ V &= mgz = mgR(1+\cos\theta) \quad \text{en} \quad L = T - V = mR^2(1-\cos\theta)\dot{\theta}^2 - mgR(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}^2\sin\theta + mgR\sin\theta - mR^2\frac{d}{dt}(1-\cos\theta)2\dot{\theta} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{of} \quad & \dot{\theta}^2\sin\theta + \tfrac{g}{R}\sin\theta - 2(1-\cos\theta)\ddot{\theta} - 2\theta\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \\ - \quad & \dot{\theta}^2\sin\theta + \tfrac{g}{R}\sin\theta - 2(1-\cos\theta)\ddot{\theta} = 0 \quad \text{of} \quad 2\left(\tfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 - \tfrac{g}{R} = 0 \end{aligned}$$

b) $\theta = \sqrt{\frac{g}{R}}t$ dan $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ en $\ddot{\theta} = 0; \quad 0 + \frac{g}{R} - \frac{g}{R} = 0$, oké.
Ook op $t = 0$ is $\theta = 0$.
Voor $t = \frac{1}{2}T$ is $\theta = 2\pi$, dus $2\pi = \sqrt{\frac{g}{R}}\left(\frac{1}{2}T\right)$ of $T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

c) $(\dot{\cos\frac{\theta}{2}}) = -(\sin\frac{\theta}{2})\frac{1}{2}\dot{\theta} = (\sin\frac{\theta}{2})(-\frac{1}{2}\dot{\theta})$
$(\ddot{\cos\frac{\theta}{2}}) = (-\frac{1}{2}\dot{\theta})(\cos\frac{\theta}{2})\frac{1}{2}\dot{\theta} + (\sin\frac{\theta}{2})(-\frac{1}{2}\ddot{\theta}) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta}^2$

$$\begin{aligned} \text{zodat} \quad & (\ddot{\cos\tfrac{\theta}{2}}) + \omega^2(\cos\tfrac{\theta}{2}) = 0 = -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \tfrac{1}{4}\cos\tfrac{\theta}{2}\dot{\theta}^2 + \omega^2\cos\tfrac{\theta}{2} = 0 \\ \text{of} \quad & -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\theta}{2}\ddot{\theta} - \tfrac{1}{4}\dot{\theta}^2 + \omega^2 = 0 \quad \text{of} \quad 2\tan\tfrac{\theta}{2}\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2 - 4\omega^2 = 0 \\ \text{zodat} \quad & 4\omega^2 = \tfrac{\sigma}{R} \quad \text{of} \quad \omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{g}{R}} \quad \text{en dus} \quad T = \tfrac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\tfrac{R}{g}}, \text{oké.} \end{aligned}$$

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de TBC niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@A-Eskwadraat.nl`

Algemene oplossing: $\cos\frac{\theta}{2} = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, met A en B constanten.

Uit $\theta(0) = 0$ volgt $B = 1$ en uit $-\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{\dot\theta}{2} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$ volgt $A = 0$ voor $t = 0$.

Dan geldt $\cos\frac{\theta}{2} = \cos\omega t$ of $\theta = 2\omega t = \sqrt{\frac{g}{R}}t$, want op $t = 0$ is $\theta = 0$.

d) $\frac{1}{2}mv^2(y) = mg(z_0 - z) \qquad \rightarrow \qquad v^2 = 2g(z_0 - z)$.

Uit de cycloïde volgt $\frac{dx}{d\theta} = R(1-\cos\theta)$ en $\frac{dz}{d\theta} = -R\sin\theta$, zodat

$$1 + \left(\tfrac{dx}{dz}\right)^2 = 1 + \tfrac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} = \tfrac{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta}{\sin^2\theta} = \tfrac{2(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} = \tfrac{2}{1+\cos\theta} = \tfrac{2R}{z}$$

$\frac{1}{4}T = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{z_0}\frac{d_z}{\sqrt{z_0 z - z^2}}$ Substitueer $z = \eta z_0$ met $0 \le \eta \le 1$ en $dz = z_0 d\eta$, dan

$$\tfrac{1}{4}T = \sqrt{\tfrac{R}{g}}\int_{\eta=0}^{1}\tfrac{z_0 d\eta}{\sqrt{z_0{}^2\eta - \eta^2 z_0{}^2}} = \sqrt{\tfrac{R}{g}}\underbrace{\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta-\eta^2}}}_{\text{getal}}; \quad \text{onafhankelijk van } z_0.$$

Substitueer $\eta = \frac{1}{2}(\alpha + 1)$ dan

$$\int_{\eta=0} 1\tfrac{d\eta}{\sqrt{\eta-\eta^2}} = \int_{\alpha=-1} +1\tfrac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = [\arcsin\alpha]_{-1}^{+1} = \pi, \quad \text{dus} \quad T = 4\pi\sqrt{\tfrac{R}{g}}.$$

Opgave 3

a)

$$\tilde p_{\text{e,voor}} = \frac{1}{c}E_0(1,0,0,0), \quad \tilde p_{\text{f,voor}} = \frac{1}{c}E_f(1,-1,0,0) \quad \text{en} \quad \tilde p_{\text{f,na}} = \frac{1}{c}E_{\text{f,na}}(1,1,0,0)$$

$$(\tilde p^2_{\text{e,voor}} = \frac{1}{c^2}E_0{}^2 = (\tilde p^2_{\text{e,na}} \quad \text{en} \quad \tilde p^2_{\text{f,voor}} = \tilde p^2_{\text{f,na}} = 0.$$

b) Behoud van vierimpuls geeft het gestelde.

$\tilde p^2_{\text{e,na}} = \tilde p^2_{\text{e,voor}} + (\tilde p_{\text{f,voor}} - \tilde p_{\text{f,na}})^2 + 2\tilde p_{\text{e,voor}} \bullet (\tilde p_{\text{f,voor}} - \tilde p_{\text{f,na}}$

$\frac{E_0{}^2}{c^2} = \frac{E_0{}^2}{c^2} + 0 + 0 - 2\tilde p_{\text{f,voor}} \bullet (\tilde p_{\text{f,voor}} - \tilde p_{\text{f,na}})$, of

$\tilde p_{\text{f,voor}} \bullet \tilde p_{\text{f,na}} = \tilde p_{\text{e,voor}} \bullet (\tilde p_{\text{f,voor}} - \tilde p_{\text{f,na}})$

$$\tfrac{1}{c^2}E_{\text{f,voor}}E_{\text{f,na}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{c}E_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \left[\tfrac{1}{c}E_{\text{f,voor}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{c}E_{\text{f,na}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$\frac{2}{c^2}E_{\text{f,voor}}E_{\text{f,na}} = \frac{1}{c^2}E_0E_{\text{f,voor}} - \frac{1}{c^2}E_0E_{\text{f,na}}$

$E_{\text{f,na}}(2E_{\text{f,voor}} + E_0) = E_0E_{\text{f,voor}}$, oké

$E_{\text{f,na}} = \frac{1}{2}E_0$ als $E_{\text{f,voor}} \gg E_0$, en
$E_{\text{f,na}} = E_{\text{f,voor}}$ als $E_{\text{f,voor}} \ll E_0$.

c) $E'_{\text{f,na}} = kE_{\text{f,na}}$ en $E'_{\text{f,voor}} = \frac{1}{k}E_{\text{f,voor}}$ Substitutie geeft dan $\frac{1}{k}E'_{\text{f,na}} = \frac{E_0kE'_{\text{f,voor}}}{E_0+2kE'_{\text{f,voor}}}$ of $E'_{\text{f,na}} = E'_{\text{f,voor}}\frac{k^2}{1+2k(\frac{E'_{\text{f,voor}}}{E_0})}$

d) $\gamma = 500 \rightarrow k = 1000$ en dus
$E'_{\text{f,na}} = (2,5\text{eV})\frac{10^6}{1+2\cdot10^3\frac{2,5}{(500)10^3}} = (2,5\text{eV})\frac{10^6}{1+\frac{1}{100}} = \frac{2,5}{1,01}\text{MeV} = 2,48\text{MeV}$.